GADING

majalah akademik itm,
cawangan pahang.

BIL: 3 JILID: 1 JAN-JUN 1989

daftar isi :

PROSES POISSON

Oleh: Shukri Shamsuddin

Di dalam teori kebarangkalian, taburan Poisson adalah salah satu daripada fungsi kebarangkalian diskrit. Fenomena yang berkait dengan fungsi kebarangkalian ini melibatkan pengiraan jumlah bilangan kejadian-kejadian yang rambang. Di antara kejadian-kejadian rambang ini adalah bilangan kemalangan jiwa berlaku setiap minggu bagi sesebuah kawasan, bilangan kematian atau kelahiran tiap-tiap hari, jumlah partikel radioaktif yang muncul per unit masa, bilangan panggilan telefon bagi sesuatu tempoh masa, bilangan organisma per unit isipadu dalam cecair, bilangan pelanggan per unit masa di sebuah kaunter, bilangan pesakit yang datang ke klinik atau hospital bagi sesuatu tempoh masa dan bilangan tahi bintang yang berlaga dengan satelit orbit. Ini tidaklah bererti bahawa kesemua bilangan kejadian rambang yang disebutkan di atas atau seakan-akan dengannya mesti menunjukkan atau mengikuti taburan Poisson, tetapi jika terdapatnya andaian-andaian yang tepat dan memenuhi syarat tertentu pada fenomena tersebut, model Poisson adalah bersesuaian.

Taburan ini mendapat namanya daripada Simeon Denis Poisson (1781-1840) seorang ahli Matematik dan Fizik[1] . Dalam bukunya yang berjudul "Recherches sur la Probabilite de Judgements', beliau membincangkan ilmu-ilmu Matematik termasuklah teorem had (limit theorem) Binomial yang menjadi asas kepada taburan Poisson.

Pada mulanya penggunaaan taburan ini hanyalah untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan ujikaji-ujikaji yang bersifat Binomial (jenis taburan kebarangkalian diskrit) yang agak rumit pengiraannya. Hingga tahun 1898 taburan Poisson menampakkan kepentingannya yang tersendiri dalam buku yang berjudul 'Das Gesert der Kleinen Zahlen (Law of small Numbers)' ditulis oleh Ladislaus von Bortkiewicz, seorang profesor Jerman yang dilahirkan di Russia[2].

Hingga kini, taburan Poisson telah membantu dalam memahami masalah-masalah beberapa kajian dalam bidang operasi penyelidikan (operational research) selain daripada digunakan bagi memudahkan pengiraan Binomial atau penyelesaian masalah kejadian rambang bersifat Poisson.

Proses Poisson

Ada tiga andaian dalam proses Poisson[3]:

1. Kebarangkalian tepat satu kejadian berlaku pada tempoh jangkamasa (t, t+h] = vh + 0(h),

2. Kebarangkalian dua atau lebih bilangan kejadian berlaku pada tempoh jangkamasa $(t\ ,\ t+h\ ])=0(h)$,

   (iaitu $P(h) = 0(h)$),

3. Bilangan kejadian yang berlaku pada tempoh jangkamasa yang tidak bertindih adalah tidak bersandaran (independent).

   (0(h) adalah fungsi di mana $\underset{h\text{--->}0}{\text{had}} \frac{0(h)}{h} = 0$)

Ketiga-tiga andaian ini memberikan pengertian bahawa; dalam suatu selang masa yang singkat, katakan $\triangle t = (t, t+h\ ]$, hanya tepat satu atau tiada langsung kejadian yang boleh berlaku. Dengan itu dua atau lebih kejadian yang sama tidak boleh berlaku serentak dalam jangkamasa tersebut. Setiap kejadian yang berlaku tidak bergantung kepada kejadian-kejadian yang telah berlaku sebelumnya atau kejadian-kejadian yang berlaku selepasnya.

Teorem^4 (1).

Jika ketiga tiga andaian di atas dipenuhi dalam sesuatu proses, maka N(t), bilangan kejadian pada tempoh jangkamasa yang panjangnya adalah t, mengikuti taburan Poisson dengan parameter u = vt. Iaitu

$$P\ (N\ (t) = n\ ) = \frac{(vt)^n}{n!}\ e^{-vt} \qquad\qquad n = 0,1,2,3,4,\ldots.$$

di mana u = kadar purata berlakunya kejadian per unit masa pada tempoh masa t.

Untuk membuktikan teorem (1), perlu dijelaskan penggunaan-penggunaan simbol:

a. Garisan masa [0, t] dan x menandakan kejadian rawak yang berlaku dalam jangkamasa [0, t], (rajah 1).

```
:< ----x---x-----x--x-x-----------x---x------xx-------x---> :

0                    Rajah 1                    t
```

b. P_n (t) : kebarangkalian n bilangan kejadian pada jangkamasa (0, t],

c. $P_1(h)$: kebarangkalian SATU kejadian berlaku pada jangkamasa (t, t+h],

d. $P_i(h)$: kebarangkalian i^{th} kejadian berlaku pada jangkamasa (t, t+h],

(b hingga d digambarkan dalam rajah 2)

```
:<-------------t------------------->    :<--h-->:

:<--x--x-------x----x------x------x--x>:<-x--->:

0                                      t       t+h

                     Pn(t)                 P1(h)
```

Rajah 2

e. 0(h) merupakan suatu fungsi di mana $\underset{h\to 0}{\text{had}} \dfrac{0(h)}{h} = 0$

Contoh: $0(h) = h^2$

$$\underset{h\to 0}{\text{had}} \frac{0(h)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{had}} \frac{h^2}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{had}}\ h = 0$$

Bukti[5]:

$P_o(t+h)$ = P (0 kejadian berlaku dalam jangkamasa (0, t+h])
= P(0 kejadian berlaku dalam jangkamasa (0, t] DAN
0 kejadian berlaku dalam jangkamasa (t, t +h])
= P(0 kejadian berlaku dalam jangkamasa (0, t]) darab
P(0 kejadian berlaku dalam jangkamasa (t, t+h])
$= P_o(t) x P_o(h)$

$P_o(h) = 1 - P$ (1 atau lebih kejadian berlaku dalam jangkamasa (t, t+h])

$= 1 - [\, P_1(h) + \sum \; P_i(h)]$

$= 1 - [\, vh + 0(h) + 0(h)\,]$

$= 1 - vh - 0(h)$,sebab $[2 \; 0(h)=0(h)]$

$P_o(t+h)= P_o(t) \, [\, 1 - vh - 0(h)\,]$

$$\underset{h \to 0}{\text{had}} \; \frac{P_o(t+h) - P_o(t)}{h} = \underset{h \to 0}{\text{had}} \; \frac{-P_o(t)vh}{h} - \frac{P_o(t)0(h)}{h}$$

$=> P_o'(t) =-vP_o(t)$

maka $\quad P_o(t)=Ce^{-vt}$

$P_o(0)=Ce^o=C$

$P_o(0)=1$ (Kebarangkalian tiada kejadian berlaku pada masa tepat kosong)

Sebab itu, C=1, dan

$P_o(t)= e^{-vt}$

$P_2(t+h)= P_2(t)\, P_o(h) + P_1(t)P_1(h) + P_o(t)P_2(h)$

$= P_2(t)\, [1 - vh -0(h)] + P_1(t)[vh - 0(h)] + P_o(t)0(h)$

$=P_2(t) - P_2(t)vh - P_2(t)0(h) + P_1(t)vh - P_1(t)0(h) + P_o(t)0(h)$

$P_2(t+h) - P_2(t) = -P_2(t)vh - P_2(t)0(h) + P_1(t)vh - P_1(t)0(h) + P_o(t)0(h)$

$$\underset{h\to 0}{\text{had}} \frac{P_2(t+h)-P_2(t)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{had}} \frac{-P_2(t)vh}{h} - \frac{P_2(t)0(h)}{h} + \frac{P_1(t)vh}{h}$$

$$-\frac{P_1(t)0(h)}{h} + \frac{P_o(t)0(h)}{h}$$

$$P_2'(t) = -P_2(t)v + P_1(t)v$$

Penyelesaian bagi persamaan ini ialah

$$P_2(t) = \frac{(vt)^2}{2t} e^{-vt} \quad \text{........[lihat apendiks]}$$

Secara amnya, didapati persamaan

$$P_n'(t) = -vP_n(t) + vP_{n-1}(t)$$

dan penyelesaian untuk sistem persamaan ini ialah

$$P_n(t) = \frac{(vt)^n}{n!} e^{-vt} \quad \text{...... [lihat apendiks]}$$

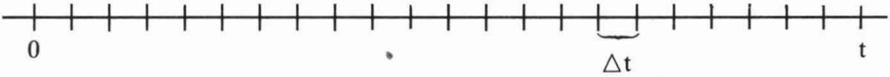
atau

$$P\,(N\,(t)=n\,) = \frac{(vt)^n}{n!} e^{-vt}$$

Perkaitan Taburan Poisson dengan Taburan Binominal

Taburan Binominal melibatkan ujikaji yang mempunyai percubaan terhingga (n). Apabila nilai percubaan ini terlalu besar dan nilai kebarangkalian percubaan yang 'berjaya' terlalu kecil, pengiraan dalam bentuk Binomial agak menyukarkan. Untuk meringankan pengiraan, taburan Poisson digunakan bagi mendapatkan nilai yang hampir sama dengan pengiraan menggunakan taburan Binomial.

Dengan mengekalkan andaian dalam proses Poisson, pada jangkamasa (0,t], bahagikan jangkamasa ini kepada n bilangan selang masa yang sama dengan menggunakan $\triangle t$, atau $n = t/\triangle t$ (Rajah 3)



Rajah 3

n bilangan selang masa ini merupakan percubaan yang tidak bersandaran. Katakan pembolehubah X menunjukkan bilangan kejayaan (kejadian berlaku) dalam n percubaan, maka X adalah pembolehubah rawak diskrit yang mengikuti taburan Binomial[6], atau

$$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$$

di mana $p = v\triangle t$ ....(andaian 1)

$$P(X=x) = {}^{n}C_{x}\, p^{x}(1 - p)^{n-x} : E(X) = np = u$$

dan Jika $n \dashrightarrow \infty$ dan $p \dashrightarrow 0$,

Maka $P(X=x) = \frac{(np)^{x}}{x!} e^{-np}$

Bukti[7]:

Jika $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$,

$p = v\triangle t = \frac{vt}{n}$

Jadi, $u = E(X) = np = \frac{nvt}{n} = vt$

$$P(X=x) = \frac{n!}{(n-x)!\ x!} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2).......(n-x+1)(n-x)!}{(n-x)! \quad x!} \left(\frac{vt}{n}\right)^{x} \left(1 - \frac{vt}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{(vt)^{x}}{x!} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{n^{x}} \left(1 - \frac{vt}{n}\right)^{n-x}$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{had}} \left(1 - \frac{vt}{n}\right)^{n} \left(1 - \frac{vt}{n}\right)^{-x} = e^{-vt}(1)^{-x}$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{had}} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{n^{x}} = 1$$

Sebab itu, jika $n \to \infty$, $p \to 0$

$$P(X=x) = \frac{(vt)^{x}}{x!} e^{-vt}$$

$$= \frac{u^{x}e^{-u}}{x!}$$

$$= \frac{(np)^{x}}{x!} e^{-np}$$

Jadual 1 menunjukkan nilai-nilai pengiraan bagi perbezaan nilai n dan p. Perhatikan bahawa bila nilai n membesar nilai p menjadi kecil bagi np yang telah ditetapkan. Nilai kebarangkalian Binomial adalah hampir kepada nilai kebarangkalian Poisson apabila nilai n besar.

x	n=5 p=0.6	n=10 p=0.3	n=20 p=0.15	n=50 p=0.06	n=100 p=0.03	n=200 p=0.015	n=1000 p=0.003	P(X=x) $= \frac{3^x e^{-3}}{x!}$	x
0	0.0102	0.0282	0.0388	0.0453	0.0476	0.0487	0.0496	0.0498	0
1	0.0768	0.1211	0.1368	0.1447	0.1470	0.1482	0.1491	0.1493	1
2	0.2304	0.2335	0.2293	0.2262	0.2252	0.2246	0.2242	0.2240	2
3	0.3456	0.2668	0.2428	0.2311	0.2274	0.2257	0.2244	0.2240	3
4	0.2592	0.2001	0.1821	0.1733	0.1707	0.1693	0.1683	0.1681	4
5	0.0778	0.1030	0.1029	0.1018	0.1013	0.1011	0.1009	0.1008	5
6		0.0367	0.1091	0.0487	0.0496	0.0500	0.0503	0.0504	6
7		0.0090	0.0546	0.0195	0.0206	0.0211	0.0215	0.0216	7
8		0.0015	0.0221	0.0067	0.0074	0.0078	0.0080	0.0081	8
9		0.0001	0.0074	0.0020	0.0023	0.0025	0.0027	0.0027	9
10		0.0000	0.0020	0.0005	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	10

Jadual 1

Taburan Binomial dengan np=3 (u=3)

n berubah daripada 5 ke atas.

$$P(X=x)= {}^{n}C_{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

Suatu fenomena Poisson

Sejauh mana ketepatan taburan Poisson secara teori berbanding dengan ujikaji atau peristiwa yang bersangkutan dengan taburan ini boleh dilihat pada sampel data yang menunjukkan taburan bilangan panggilan (keluar) telefon resmi bulan Januari hingga Jun yang dibuat oleh kakitangan ITM Cawangan Pahang sepanjang tahun 1986, ditunjukkan dalam jadual 2. Purata bilangan panggilan didapati sebagai 0.8921 iaitu lebih kurang sama dengan satu panggilan setiap 15 minit.

Untuk memastikan sama ada data sampel adalah bertaburan mengikut Poisson, ujian hipotesis, Ho:taburan datang daripada Poisson, dilakukan. Statistik ujian ini ialah Khi-Kuasadua[8] (Chi-Square: χ^2).

di mana $X^2 = \sum \frac{(0 - E)^2}{E}$

Jadual 3 menunjukkan pengiraan ini dan didapati nilai X^2=5.8625. Bagi paras keertian 5% (level of significant), hipotesis Ho diterima dan ini menyokong bahawa bilangan panggilan telefon resmi yang dilakukan oleh kakitangan ITM Cawangan Pahang mengikut taburan Poisson dengan min bilangan panggilan sebanyak satu panggilan setiap 15 minit.

Jadual 2

Taburan kekerapan bilangan panggilan (keluar) telefon resmi setiap 15 min yang dibuat oleh kakitangan ITMCP waktu pejabat di antara bulan Januari - Jun sepanjang tahun 1986 *.

Bilangan panggilan yang dibuat setiap 15 minit pada hari kerja (X)	Kekerapan	$\frac{f}{n}$ =	P(X=x) $\frac{0.8921\,^{x}e^{-0.8921}}{x!}$
0	356	0.4315	0.4098
1	287	0.3479	0.3656
2	121	0.1467	0.1631
3	45	0.0545	0.0485
4	12	0.0145	0.0108
5	1	0.0012	0.0019
6	2	0.0024	0.0003
7	1	0.0012	0.000036
	825		

Min = 0.8921 = 1 panggilan setiap 15 minit (=u)

Sampel mengandungi 30 hari kerja yang dipilih secara rawak mudah daripada rekod panggilan (keluar) resmi di antara bulan Januari hingga Jun 1986.

Sumber: Rekod operator ITMCP (Rosmah)

Jadual 3

Taburan kekerapan bilangan panggilan telefon dan taburan kekerapan jangkaan Poisson dengan min u= 0.8921 (1 panggilan/15 minit)

Bilangan panggilan X	kekerapan 0	Kekerapan jangkaan E	(0 − E)	$(0 - E)^2/E$
0	356	338	18	0.9586
1	287	302	−15	0.7450
2	121	134	−13	1.2612
3	45	40	5	0.6250
4	12	9	3	
	16	11	5	2.2727
5+	4	2	2	
				X^2=5.8625

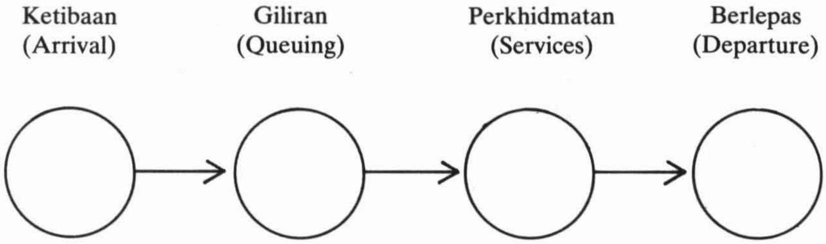
Nilai $X^2_{0.05;3}$ = 7.81473 dan $X^2_{0.10;3}$ =6.25139

Tidak bererti pada aras keertian 5% dan 10%.

Penggunaan Taburan Poisson

Dalam bidang operasi penyelidikan, proses Poisson berkait dengan beberapa masalah yang bersangkutan dengan teori giliran (queuing theory) model stokastik (stochastic model). Khususnya, taburan Poisson dan taburan Eksponen (exponential distribution) adalah asas kepada masalah bentuk sistem giliran yang paling mudah (dikenali sebagai masalah 'Single Server Poisson Exponential Queuing System'-Rajah 4)^9. Dengan kefahaman mengenai sifat-sifat taburan atau proses Poisson, penyelesaian masalah-masalah yang bersamaan atau berbentuk sistem barisan dapat diselesaikan dengan lebih mudah.

Rajah 4



Masalah-masalah yang biasanya bersangkutan dengan suatu sistem galiran yang lebih kompleks (dan melibatkan proses Poisson) lebih mudah diselesaikan melalui proses simulasi (simulation). Dengan bantuan komputer masalah seumpama ini dapat dipercepatkan penyelesaiannya. Semestinya, komputer akan diprogramkan mengikut kehendak masalah bersangkutan dan masalah-masalah yang berkaitan dengan proses Poisson sudah tentu memerlukan kefahaman terhadap proses ini terlebih dahulu.

Kesimpulan

Proses Poisson telah dikenali dalam abad yang ke lapan belas di mana ketika itu ia tidak menampakkan kepentingannya yang tersendiri melainkan sebagai 'alat' penyelesaian masalah-masalah Binomial. Sehingga kurun ke sembilan belas ahli-ahli Matematik telah menunjukkan kepentingan taburan Poisson yang unik mengikut syarat-syaratnya yang tersendiri dikenali dengan proses Poisson. Hingga kini proses Poisson bukan hanya terhad dalam disiplin Matematik, teori Statistik dan Kebarangkalian malahan amat berguna dalam disiplin Operasi Penyelidikan, yang mana telah membantu dalam penyelesaian masalah-masalah pengurusan berkaitan yang agak kompleks.

$$Po(t)=e^{-vt}$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=-P_1(t)v + Po(t)v$$

$$\Rightarrow \frac{dP_1(t)}{dt} + P_1(t)v = ve^{-vt}$$

$$\Rightarrow e^{vt} \frac{dP_1(t)}{dt} + ve^{vt}P_1(t) = e^{vt}e^{-vt}v$$

$$\Rightarrow \frac{dP_1(t)e^{vt}}{dt}=v$$

$$\Rightarrow \qquad P_1(t)e^{vt} = \int v \, dt$$

$$\Rightarrow \qquad P_1(t) = vt\, e^{-vt} + C1$$

$P_1(0) = 0$ [Andaian tepat SATU kejadian terjadi pada masa t =0 adalah TIDAK mungkin terjadi]

Maka C1 = 0,

dan $P_1(t) = (vt)e^{-vt}$

$$\Rightarrow \frac{dP_2(t)}{dt}=-vP_2(t) + (vt)e^{-vt}v$$

$$\Rightarrow \frac{dP_2(t)}{dt} + P_2(t)v = v^2te^{-vt}$$

$$\Rightarrow e^{vt} \frac{dP_2(t)}{dt} + ve^{vt}P_2(t) =v^2t$$

$$\Rightarrow \frac{dP_2(t)e^{vt}}{dt} = v^2t\ .$$

$$\Rightarrow P_2(t)e^{vt} = \frac{v^2t^2}{2} + C2$$

$$\Rightarrow P_2(t) = e^{-vt}\frac{(vt)^2}{2} + C2$$

$P_2(0) = 0$ [Andaian tepat DUA kejadian berlaku pada masa t=0 adalah TIDAK mungkin terjadi.]

Maka C2 = 0,

dan $P_2(t) = \frac{(vt)^2}{2} e^{-vt}$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -vP_3(t) + \frac{(vt)^2}{2} e^{-vt}v$$

$$\Rightarrow \frac{dP_3(t)}{dt} + P_3(t)v = v^3 \frac{t^2}{2} e^{-vt}$$

$$\Rightarrow e^{vt} \frac{dP_3(t)}{dt} + ve^{vt} P_3(t) = v^3 \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dP_3(t)e^{vt}}{dt} = v^3 \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow P_3(t)e^{vt} = \frac{v^3t^3}{3x2} + C3$$

$$\Rightarrow P_3(t) = e^{-vt}\frac{(vt)^3}{3\,x2} + C3$$

$P_3(0) = 0$ [Andaian tepat TIGA kejadian berlaku pada masa t=0 adalah TIDAK mungkin terjadi.]

Maka $C3 = 0$,

dan $P_3(t) = \frac{(vt)^3}{3!} e^{-vt}$

Didapati bahawa:

$$Po(t)=e^{-vt}$$

$$P_1(t) = vt\, e^{-vt}$$

$$P_2(t)= \frac{(vt)^2}{2!} e^{-vt}$$

$$P_3= \frac{(vt)^3}{3!} e^{-vt}$$

Andaikan ini adalah benar untuk

$$P_k(t)= \frac{(vt)^k}{k!} e^{-vt}$$

Adakah ianya benar untuk $P_{k+1}(t)= \frac{(vt)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-vt}$?

$$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = -vP_{k+1}(t) + v \frac{(vt)^k}{k!} e^{-vt}$$

$$\Rightarrow \frac{dP_{k+1}(t)}{dt} + vP_{k+1}(t) = v^{k+1} \frac{(t)^k}{k!} e^{-vt}$$

$$\Rightarrow e^{vt} \frac{dP_{k+1}(t)}{dt} + ve^{vt} P_{k+1}(t)= v^{k+1} \frac{(t)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \frac{dP_{k+1}(t)e^{vt}}{dt} = v^{k+1} \frac{(t)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow P_{k+1}e^{vt} = \int v^{k+1}\frac{(t)^k}{k!}\,dt$$

$$= \frac{v^{k+1}\,t^{k+1}}{(k+1)k!} + C$$

$$= \frac{(vt)^{k+1}}{(k+1)!} + C$$

dan, $P_{k+1}(t) = \frac{(vt)^{k+1}}{(k+1)!}e^{-vt} + C$

$P_{k+1}(0) = 0,$

Maka $P_{k+1}(0)= \frac{(v(0))^{k+1}}{(k+1)!}e^{-v(0)} + C= C$

dan $C = 0.$

Dengan itu, $P_{k+1}(t)= \frac{(vt)^{k+1}}{(k+11)!}e^{-vt}$

membuktikan bahawa

$P_n(t)= \frac{(vt)^n}{n!}e^{-vt}$ melalui induksi.

Nota dan Rujukan

1. *Richard J. Larsen,* **An introduction to Probability and Its Application,** *Prentice Hall, 1985. ms. 306.*

2. *Richard J. Larsen,* **An introduction to Probability and Its Application,** *Prentice Hall, 1985. ms. 310.*

3,4,5. *Mood, Graybill and Boes,* **Introduction To the Theory of Statistics,** *3rd Edition, McGraw-Hill 1974. ms. 95*

6. *Lam Swee Kin,* **Statistik STPM,** *Fajar Bakti 1986. ms. 339*

7. *Harold J. Larson,* **Introduction to Probability Theory And Statistical Inferences,** *Third Edition, John Wiley & Sons, 1982. ms. 185*

8. *Malik Mulen.* **Applied Statistics for Business And Economics,** *Addison Wesley, 1975. ms. 306*

9. *David Eugene Smith,* **Quantitative Business analysis,** *Robert E. Krieger Publishing Company Inc, 1982. ms. 539*

10. *M. Braun,* **Differential Equations and Their Applications,** *2nd Edition, Springer-Verlag, New York Inc. 1875.*

11. *Susan L. Solomon,* **Simulation of Waiting-Line System,** *Prentice-Hall Inc, 1983.*

12. *PA Ismail,* **Kebarangkalian,** *DBP, 1985.*

13. *Hoel/Port/Stone,* **Introduction to Probability Theory,** *Houghton Miffin Company, 1971.*