GADING

Jurnal
UiTM Cawangan Pahang

JILID 5 BIL : 3 JAN-JUN 2000 ISSN 0128-5599

KERTAS KERJA PENYELIDIKAN / RESEARCH PAPERS

SOROTAN PERKEMBANGAN PENGIRAAN NILAI π

DAUD MOHAMAD
Universiti Tekologi MARA
Kampus Bukit Sekilau, Kuantan

ABSTRAK

Kertas kerja ini mendedahkan sedikit sejarah mengenai perkembangan nilai π serta perlumbaan sehingga kini untuk mendapatkan nilai tersebut seberapa tepat yang mungkin.

PENGENALAN

π merupakan suatu nombor yang kerap digunakan di dalam matematik. Antara contoh mudah yang selalu dilihat ialah di dalam formula luas bagi suatu bulatan iaitu πj^2 dengan j sebagai jejari bagi bulatan tersebut. Nilai π, yang biasanya ditulis sebagai 3.14159... telah dibuktikan sebagai nombor tak nisbah[1] dan transedensal[2]. Nilai ini juga sering dianggarkan sebagai 22/7 walaupun nilai ini juga sering dianggarkan sebagai 22/7 walaupun nilai tersebut hanya tepat untuk dua tempat perpuluhan.

LATARBELAKANG SEJARAH π

Empat ribu tahun dahulu, manusia telah menemukan bahawa nisbah ukurlilit bulatan kepada diameter adalah lebih kurang 3. Nisbah ini diwakilkan dengan symbol π yang hanya mula dipopularkan oleh Euler pada tahun 1737. Pada zaman kegemilangan tamadun Babylon, nilai π dikesan penggunaannya dengan nilai anggaran 3 1/8 atau 3.125 dan pada zaman kegemilangan tamadun Mesir, (1650 SM) pula, nilai π dianggarkan sebagai

$4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.16$. Melalui dokumen yang tersimpan, orang Mesir menganggap bulatan berdiameter sembilan unit mempunyai luas yang sama dengan segiempat yang bersempanan 8 unit (Bailey et. al., 1997) dan daripada penemuan ini anggaran bagi nilai π diperolehi.

---

1. Nombor tak nisbah adalah nombor yang tidak boleh diwakilkan sebagai hasilbahagi dua nombor interger.
2. Nombor transedensal ialah nombor yang bukan punca kepada sebarang persamaan Aljabar dengan koefisien nombor nisbah

Salah satu usaha yang dilakukan oleh ahli matematik sehingga hari ini ialah mencari nilai π seberapa tepat yang mungkin. Mengikut sejarah, orang pertama yang memulakan usaha sedemikian ialah Archimedes (287 - 212 S.M) yang telah menganggarkan nilai π di antara 223/71 dan 22/7. Walaupun beliau tidak memberi nilai yang tetap, ralat bagi nilai yang beliau kemukakan hanyalah 0.0002. Ini boleh dikatakan sebagai suatu anggaran yang baik pada zaman tersebut.

Kaedah yang digunakan oleh Archimedes juga digunakan oleh ahli matematik lain selepas itu untuk mendapatkan nilai π yang lebih tepat, antaranya

Ptolemy	(150 Tahun Masehi) :	3.1416,
Al-Kashi	(1430 Tahun Masehi) :	tepat kepada 14 digit,
Van Cuelen	(1600 Tahun Masehi) :	tepat kepada 35 digit.

Dengan berlakunya perkembangan bidang sains yang begitu pesat, khususnya matematik di zaman kebangkitan Eropah, pengiraan nilai π telah menjadi salah satu agenda penyelidikan utama di dalam teori nombor. Pengiraan nilai π telah banyak dibantu oleh perkembangan kalkulus pada masa itu. Sebagai contoh, pada tahun 1593, Viote telah memberikan

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdots \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Manakala pada tahun 1655, John Wallis membuktikan bahawa

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots$$

dan satu hasil penting yang dikemukakan oleh Leibneitz pada tahun 1673 ialah

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Hasil oleh Leibneitz ini diterbitkan daripada satu formula yang melibatkan trigonometri songsang, kamiran dan siri iaitu

$$\mathrm{Tan}^{-1} \chi = \int_0^x \frac{dt}{1+t}^2 = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)dt$$

$$= \chi \frac{x3}{3} + \frac{x5}{5} - \frac{x7}{7} = \frac{x9}{9}$$

dengan nilai x digantikan dengan 1. Walau bagaimanapun, siri di atas agak lambat untuk menumpu dengan kadar yang perlahan, sebagai contoh, 10,000 sebutan diperlukan untuk hanya mendapat ketepatan 4 digit.

Namun begitu, hasil ini telah diperbaiki dengan menggunakan persamaan

$$\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Yang memberikan

$$\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{(3.3)}+\frac{1}{(5.3.3)}-\frac{1}{7.3.3.3}+\ldots\right)$$

dan siri ini menumpu dengan kadar yang lebih cepat serta memberi ketepatan nilai π sebanyak 4 digit dengan hanya menggunakan 9 sebutan sahaja. Lanjutan daripada penemuan di atas, Machin, pada tahun 1706 telah menggunakan formula berbentuk

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)$$

untuk mendapatkan siri yang menumpu dengan lebih cepat dan pada masa yang sama, mencapai ketepatan sehingga 100 digit . Kaedah yang serupa telah digunakan oleh beberapa ahli matematik lain antaranya,

Vega	(1794)	: tepat kepada 136 digit,
Rutherford	(1853)	: tepat kepada 440 digit,
Shank	(1873	: tepat kepada 707 digit,

Untuk hasil yang diperolehi, Shank, Ferguson (1945) telah mengesan bahawa terdapat kesilapan di dalam pengiraan dan megesahkan bahawa pengiraan Shank hanya tepat sehingga 527 digit sahaja. Di dalam hal ini, Ferguson telah menggunakan formula

$$\frac{\pi}{4}=3\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{1985}\right)$$

Nilai π bukan sahaja dibincangkan di dalam dunia matematik tetapi juga pernah menjadi bahasa perbahasan di beberapa medan perbincangan umum.

Pada tahun 1894, majalah *American Mathematical Monthly* telah mengenengahkan beberapa takrif bagi nilai π (lihat Singmaster, 1985) yang memberikan beberapa nilai anggaran, antaranya

4, $\frac{256}{81}$(3.160494), 16 $\frac{\sqrt{2}}{7}$(3.265306), $\frac{160}{49}$(3.265306), $\frac{16}{5}$(3.2), dan 3.1416.

Sebelum itu pula, pada tahun 1888, satu usul telah dibentangkan di dalam Dewan Perwakilan di Indiana, Amerika Syarikat untuk menetapkan takrif sebenar bagi π (juga lihat Singmaster, 1985). Di situ empat nilai dicadangkan, iaitu 4, 3.333...,16/5 dan 32/9.

Walau bagaimanapun, disebabkan berlakunya perdebatan yang hangat, maka tiada ketetapan yang telah diambil dan ditunda kepada sesi yang lain. Malangnya, tiada perbahasan yang dilakukan selepas itu untuk membuat keputusan dan perkara tersebut ditinggalkan begitu sahaja.

PERKEMBANGAN TERKINI

Dengan wujudnya teknologi komputer, penyelidikan mengenai π lebih tertumpu kepada mencari algoritma yang terbaik yang memberikan nilai π seberapa tepat yang mungkin. Pengiraan nilai π dengan berbantukan komputer bermula sejak tahun 1949. Mesin pertama yang digunakan ialah ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) dan pengiraan yang dibuat adalah berdasarkan kepada formula Machin. Pengiraan mengambil masa hampir 70 jam untuk mendapatkan nilai π tepat sehingga 2,037 digit.

Sehingga tahun 70an, pengiraan menggunakan mesin yang berbeza masih menggunakan formula Machin, tetapi pada tahun 1985 Gosper telah menggunakan formula:

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{9801}$$

dan menghasilkan nilai π tepat kepada 17 juta digit. Formula ini diambil daripada hasil yang diperoleh oleh seorang ahli matematik India yang bernama Ramanujan sekitar tahun 1910. Untuk setiap sebutan di dalam formula, siri yang berkaitan akan memberi peningkatan di dalam ketepatan nilai sebanyak 8 digit.

Ketepatan nilai π meningkat secara mendadak kepada billion digit apabila satu algoritma diperkenalkan iaitu algoritma Gauss-Salamin (juga dikenali sebagai Salamin – Brent), pada tahun 1976. Salamin telah memperkenalkan satu algoritma yang berdasarkan kepada formula min aritmetik – geometric dengan satu carta – alir yang mudah seperti berikut (lihat Lord, 1995)

INITIAL A= 1, B = $1/\sqrt{2}$, C = $1/4$, X = 1

Y = A
A = (A + B)12

$$B = \sqrt{BY}$$
$$C = C - X(A-Y)^4$$
$$X = 2X$$
$$\text{PRINT: } (A+B)^2/4C$$

Dengan hanya 25 iterasi, algoritma ini mampu untuk menghasilkan nilai π tepat sehingga 45 juta digit. Walau bagaimanapun, satu kelemahan mengenai algoritma ini ialah, setiap pengiraan mestilah mempunyai ketepatan yang tinggi setanding dengan ketepatan nilai π dan tidak semua mesin komputer ketika itu dapat menghasilkan sedemikian.

Pada tahun 1985, dengan sedikit penokoktambahan kepada algoritma awal Gauss-Salamin, P. Borwein dan J. Borwein telah dapat mempertingkatkan kadar penumpuan siri kepada secara kubik iaitu ketepatan nilai meningkat tiga kali ganda (lihat Bailey et. al. 1997). Algoritma ini diperbaiki lagi oleh mereka selepas itu dan hasilnya ialah ketepatan pengiraan meningkat secara kuartik. Dengan menerapkan algoritma yang serupa, ketepatan nilai π meningkat sehingga 1 bilion digit yang dilakukan oleh Kanada dan Tamura pada bulan November 1989, dan pada tahun 1995, Kanada dan Takahashi telah memperolehi ketepatan sehingga 6.4 bilion digit. Kegilaan pengiraan nilai π tidak terhenti setakat itu. Pada tahun 1997, Kanada telah memperolehi ketepatan sehingga 51 bilion digit dan yang terkini yang diperolehi pada 4 Oktober 1999 ialah ketepatan sehingga 206 bilion digit (tepatnya ialah 206,153,430.000 digit).

Kesemua pengiraan dibuat dengan menggunakan Hitachi Super Computer. Pengiraan terakhir menggunakan Hitachi SR8000 dengan masa 37 jam dan masa semakan selama 46 jam. Sehingga kini, inilah rekod rasmi bagi pengiraan nilai π.

PENUTUP

Mengikut lazimnya, seseorang akan bertanya, kenapa perlu mengira nilai π dengan ketepatan sehingga berbilion digit walhal di dalam pengiraan biasa, hanya beberapa digit sahaja yang diperlukan? Apa yang tersirat di dalam perlumbaan untuk mendapatkan nilai π sehingga berbilion digit sebenarnya adalah untuk menguji kesepaduan di antara keupayaan 'software' sesuatu komputer (Bailey et. al. 1997). Ini kerana, dengan sedikit kesilapan kecil sahaja akan memporak-perandakan pengiraan. Ini terbukti daripada kesilapan yang dibuat oleh Shank pada tahun 1873 yang dikesan oleh Ferguson pada tahun 1945. Selain itu, jika didapati dua mesin yang memperolehi nilai π dengan ketepatan yang sama, perbandingan akan dibuat dengan melihat tempoh masa untuk melakukan operasi pengiraan tersebut. Sudah tentu, masa yang lebih singkat akan membuktikan keupayaan yang lebih bagi sesuatu mesin.

Pada masa yang sama, perlumbaan untuk mendapatkan nilai π yang tepat telah menjana penyelidikan yang hebat dalam menghasilkan algoritma terbaik untuk diuji oleh komputer, antaranya dalam bidang konvolusi linear dan penjelmaan Fourier yang banyak digunakan di dalam sains dan kejuruteraan. Akhir sekali, sebagaimana ahli atlet yang sentiasa berlumba memperbaiki masa atau jarak, perlumbaan pengiraan nilai π merupakan satu cabaran yang harus diterokai kerana ia sentiasa memberi sesuatu yang baru dan ruang penyelidikan yang tiada batasan.

RUJUKAN

1. G. Almkrist, Many correct digit of π, revisited, American Mathematical Monthly, 104
   (1997), pp 351 – 353.

2. Archimedes'Constant,asinhttp://www.mathsoft.com/asolve/constant/pi/pi.html.

3. E. Assimus, Pi, American Mathematical Monthly, 92 (1985) pp 213 – 214.

4. D. Bailey, J. Borwein, P. Borwein and S. Ploutte, 1997, The quest for Pi, The Mathematical Intelligence, Springer Verlag, New York, pp 50 – 57.

5. N. Lord, 1995, Recent calculation of π: the Gauss – Salamin algorithm, The Mathematical Gazette. Vol. 76, no. 476, pp 231 – 242.

6. New World record of Pi: 51.5 bilion digits as in http://www.cecm.sfu.ca/personal/jborwein/Kanada-506.html.

7. Pi through the ages, Mac Tutor History of Mathematics achieve, Univ. of St. Andrews.

8. D. Singmaster, 1985 The Legal Values of Pi, The Mathematical Intelligence, Vol. 7,no.2, pp 69 – 72.

9. New world record at 4th Oct. 1999, Pi News by Kanada Laboratory, as in http://www.lupi.ch/Pisites/Pi-Rekord.html

LAMPIRAN

Nama	Tahun	Bil. Ketepatan Digit	
Babylonians	2000? B.C.E	1	3.125 $\left(3\frac{1}{8}\right)$
Egytians	2000? B.C.E	0	3.16045 $\left[4\frac{8_2}{9}\right]$
China	1200? B.C.E	0	3
Bible (1 King 7:23	550? B.C.E	0	3
Archimeds	250? B.C.E	3	3.1418 (ave)
Hon Han Shu	A.D.130	0	3.16227 $\left(\sqrt{10?}\right)$
Ptolemy	150	3	3.14166
Chung Hing	250?	0	3.162277 $\left(\sqrt{10}\right)$
Wang Fau	250?	0	3.15555 $\left(\frac{142}{45}\right)$
Liu Hui	263	5	3.14159
Siddhanta	380	4	3.1416
Tsu ch'ung Chi	480?	7	3.14155926
Aryabhata	499	4	3.14156
Brahmagupta	640?	0	
Al-Khorizmi	800	4	3.1416
Fibonacci	1220	3	3.141818
Al-Kashi	1429	14	
Otho	1573	6	3.1415929
Viete	1593	9	3.1415926536 (ave.)
Romanus	1593	15	
Van Ceulen	1596	20	
Van Cuelen	1615	35	
Newton	1665	16	
Sharp	1699	71	
Seki	1700?	10	
Kamata	1730?	25	
Machin	1706	100	
De Lagny	1719	127	(112 correct)
Takebe	1723	41	
Matsunaga	1739	50	
Vega	1794	140	
Rutherford	1824	208	(152 correct)
Strassnitzky and Dase	1844	200	
Clausen	1847	248	
Lehmann	1853	261	
Rutherford	1853	440	
Shanks	1874	707	(527 correct)

Nama	Tahun	Bil. Ketepatan Digit
Ferguson	1946	620
Ferguson	Jan. 1947	710
Ferguson and Wrench	Sep. 1947	808
Smith and Wrench	1949	1,120
Reitwiesner, et al. (ENIAC)	1949	2,037
Nicholson and Jeenel	1954	3,092
Felton	1957	7,480
Genuys	Jan. 1958	10,000
Felton	May 1958	10,021
Guilloud	1959	16,167
Shanks and Wrench	1961	100,265
Guiloud and Filliatre	1966	250,000
Guiloud and Dichampt	1967	500,000
Guilloud and Bouyer	1973	1,001,250
Miyoshi and Kanada	1981	2,00,036
Guilloud	1982	2,00,050
Tamura	1982	2,097,144
Tamura and Kanada	1982	4,194,288
Tamura and Kanada	1982	8,388,576
Kanada, Yoshino and Tamura	1982	16,777,206
Ushiro and Kanada	Oct. 1983	10,013,395
Gosper	1985	17,526,200
Bailey	Jan. 1986	29,360,111
Kanada and Tamura	Sep. 1986	33,554,414
Kanada and Tamura	Oct.1986	67,108,839
Kanada, Tamura, Kubo, et al.	Jan. 1987	134,217,700
Kanada and Tamura	Jan. 1988	201,326,551
Chudnovskys	May. 1989	480,000,000
Chudnovskys	June. 1989	525,229,270
Kanada and Tamura	July. 1989	536,870,898
Kanada and Tamura	Nov. 1989	1,073,741,799
Chudnovskys	Aug.1989	1,011,196,691
Chudnovskys	Aug.1991	2,260,000,000
Chudnovskys	May.1994	4,044,000,000
Takahashi and Kanada	June 1995	3,221,225,466
Kanada	Aug. 1995	4,294,967,286
Kanada	Oct. 1995	6,442,450,938
Kanada	1997	51,539,600,000
Kanada	Apr. 1999	68.719,470,000
Kanada	Oct. 1999	206,158,430,000