HAMPIRAN RASIONAL $\sqrt{3}$ MELALUI KAEDAH MEDIAN HURWITZ'

Nazirah Ramli
Fakulti Teknologi Maklumat & Sains Kuantitatif, Universiti Teknologi MARA Pahang

ABSTRAK

Kertas kerja ini memfokuskan penghampiran nombor tak rasional $\sqrt{3}$ kepada nombor rasional. Kaedah Median Hurwitz' digunakan bagi memperolehi hampiran rasional yang terbaik. Perbandingan darjah ketakrasionalan $\sqrt{3}$ dengan nombor tak rasional π dan $\sqrt{2}$ turut dibincangkan.

PENGENALAN

Terdapat pelbagai kaedah yang telah dijalankan untuk memperolehi hampiran nombor-nombor tak rasional. Penghampiran nombor tak rasional kepada nombor rasional biasanya menggunakan kaedah pecahan berulang yang diberikan sebagai

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{1 + \mathrm{K} + \cfrac{1}{a_n + \mathrm{K}}}}}}$$

atau diringkaskan sebagai $[a_0; a_1, a_2, a_3, \mathrm{K}, a_n, \mathrm{K}]$.

Kembangan pecahan berulang bagi π ditemui oleh John Wallis pada tahun 1685 yang diberikan sebagai
[3: 7, 15, 1, 292, 1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,...]. Oleh itu, enam hampiran rasional yang pertama bagi π ialah $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104384}{33215}$. Manakala kembangan pecahan berulang bagi logaritma asli e iaitu [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,...], pertama kali diperolehi oleh Roger Cotes pada tahun 1714 .

Barrow (2000), menggunakan kaedah 'chaotic' untuk mendapatkan penghampiran bagi nombor tak rasional. Beliau membentuk persamaan $u = k_i + x_i$ dengan u ialah nombor tak rasional asal, k_i ialah bahagian integer dan x_i merupakan bahagian pecahannya. Nilai $k_1 = [u]$, $k_2 = \left[\frac{1}{x_1}\right]$ dan seterusnya $k_n = \left[\frac{1}{x_{n-1}}\right]$. Selanjutnya, beliau menyusun nilai-nilai k_i dalam bentuk kembangan pecahan berulang. Walaubagaimanapun, kaedah ini hanya boleh diaplikasi bagi x_i antara 0 dan 1 sahaja.

Tall dan Mills juga menggunakan kaedah pecahan berulang yang hampir sama dengan kaedah 'chaotic' yang digunakan oleh Barrow (2000). Mereka menghasilkan algoritma dalam fungsi BBC BASIC yang memberi jujukan hampiran rasional bagi x sebagai $n_1, n_1 + \frac{1}{n_2}, n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n^3}}, n_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4}}}, \mathrm{K}$ dengan $x = n_i + d_i$, $r_1 = x$, $d_k = r_k - n_k$ dan $n_k = [r_k]$.

Butcher menggunakan siri Farey bagi mendapatkan hampiran rasional bagi π. Beliau menghampirkan nilai $x = \pi - 3$ dengan syarat batas atas $\left| x - \frac{n}{d} \right| < \frac{1}{2d}$ bagi $x \in [0,1]$ serta n dan d merupakan pembilang dan penyebut masing-masing.

Rowland (1999) pula menggunakan kaedah median untuk mendapatkan penghampiran nombor tak rasional bagi π dan $\sqrt{2}$. Kaedah ini menggunakan batas bawah (L_1, L_2) dan batas atas (U_1, U_2) dengan nilai awal batas bawah merupakan nilai integer bagi x dan batas atas merupakan nilai integer bagi $x+1$ untuk suatu nombor tak rasional x. Median (M_1, M_2) bagi batas bawah dan batas atas dikira sebagai $\frac{M_1}{M_2} = \frac{L_1 + U_1}{L_2 + U_2}$. Darjah median ditentukan samada median kurang atau lebih daripada x. Jika median kurang daripada x, maka median dipilih sebagai batas bawah baru. Manakala jika median lebih daripada x, maka median akan dipilih sebagai batas atas baru. Setiap nilai median yang diperolehi merupakan hampiran bagi x.

Bagi nombor tak rasional $\sqrt{2}$, Rowland (1999) mendapati bahawa nilai mediannya tidak pernah menumpu kepada suatu nombor rasional (kiraan beliau hingga median ke 29 sahaja) . Namun begitu, menurutnya semakin banyak median yang dikira, nilai median akan semakin menghampiri $\sqrt{2}$.

Bagi π pula, Rowland mendapat keputusan yang agak berbeza yang mana median menumpu kepada nilai $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$ dan $\frac{103993}{33102}$.

Milinovich (2004), menggunakan Teorem Liouville untuk mengkaji hampiran rasional bagi nombor-nombor tak rasional. Berdasarkan kajiannya, diperolehi bahawa jika suatu nombor tak rasional boleh dihampirkan dengan baik dan penyebutnya adalah kecil, maka nombor tak rasional tersebut bersifat transedensal.

Phillips (2000) telah menggunakan Teorem Hurwitz' untuk mendapatkan perbandingan ketakrasionalan di antara π dan $\sqrt{2}$. Beliau mendapati bahawa bagi penyebut kurang daripada 10, $\frac{22}{7}$ merupakan hampiran terbaik bagi π dengan ralat 0.00126 dan bagi penyebut kurang daripada 200, $\frac{355}{113}$ merupakan hampiran terbaik π dengan ralat 0.000000266. Manakala bagi penyebut kurang daripada 10, $\frac{7}{5}$ merupakan hampiran terbaik bagi $\sqrt{2}$ dengan ralat 0.0142 dan bagi penyebut kurang daripada 200, $\frac{239}{169}$ merupakan hampiran terbaik bagi $\sqrt{2}$ dengan ralat 0.0000124.

Berdasarkan Teorem Hurwitz' yang menyatakan bahawa setiap nombor tak rasional mempunyai ketakterhinggaan hampiran $\frac{p}{q}$ dengan ralat kurang daripada $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, Phillips (2000) mendapati bahawa $\sqrt{2}$ adalah lebih tak rasional daripada π.

Selain daripada itu, terdapat juga maklumat dari internet yang kurang jelas tentang kaedah penghampiran nilai π yang menggunakan konsep pengoptimuman. Kaedah tersebut menggunakan pendekatan untuk meminimakan nilai U dengan $U(x_1, x_2) = \left| \frac{x_1}{x_2} - \pi \right|$ serta x_1 dan x_2 merupakan integer yang terletak antara 0 dan 1023.

Walaubagaimanapun, kertas kerja ini tidak akan memfokuskan tentang hampiran bagi π atau $\sqrt{2}$ tetapi pemfokusannya adalah kepada penghampiran $\sqrt{3}$.

PROSEDUR KAEDAH

Penghampiran nombor tak rasional $\sqrt{3}$ kepada nombor rasional ialah dengan menggunakan kaedah Median Hurwitz' iaitu gabungan kaedah median (Rowland, 1999) dan Teorem Hurwitz'. Jadual 1 menunjukkan keputusan hampiran bagi $\sqrt{3}$.

Jadual 1: Hampiran rasional bagi $\sqrt{3}$ melalui Kaedah Median Hurwitz'

Bil	L_1	L_2	U_1	U_2	M_1	M_2	E = Ralat	$M = \dfrac{1}{\sqrt{5}(M_2)^2}$	$\dfrac{E}{M}$
1	1	1	2	1	3	2	0.23205	0.111803	2.07553
2	3	2	2	1	5	3	0.06538	0.04969	1.31583
3	5	3	2	1	7	4	0.017949	0.027951	0.64217
4	5	3	7	4	12	7	0.01777	0.009127	1.94647
5	12	7	7	4	19	11	0.00478	0.003696	1.29278
6	19	11	7	4	26	15	0.001283	0.001988	0.645258
7	19	11	26	15	45	26	0.00128	0.000662	1.93721
8	45	26	26	15	71	41	0.00034	0.000266	1.29112
9	71	41	26	15	97	56	9.2E-05	0.000143	0.645477
10	71	41	97	56	168	97	9.2E-05	4.75E-05	1.93655
11	168	97	97	56	265	153	2.5E-05	1.91E-05	1.29103
12	265	153	97	56	362	209	6.61E-06	1.02E-05	0.645454
13	265	153	362	209	627	362	6.6E-06	3.41E-06	1.93662
14	627	362	362	209	989	571	1.8E-06	1.37E-06	1.29131
15	989	571	362	209	1351	780	4.74E-07	7.35E-07	0.644911
16	989	571	1351	780	2340	1351	4.7E-07	2.45E-07	1.93825
17	2340	1351	1351	780	3691	2131	1.3E-07	9.85E-08	1.29537
18	3691	2131	1351	780	5042	2911	3.36E-08	5.28E-08	0.637328
19	3691	2131	5042	2911	8733	5042	3.4E-08	1.76E-08	1.961
20	8733	5042	5042	2911	13775	7953	9.6E-09	7.07E-09	1.35197
21	13775	7953	5042	2911	18817	10864	2.01E-09	3.79E-09	0.531717
22	13775	7953	18817	10864	32592	18817	2.9E-09	1.26E-09	2.27783

PERBINCANGAN

Berdasarkan Jadual 1, didapati bahawa nilai median menumpu kepada batas atas Hurwitz' pada median ke 3, 6, 9,12,15, 18 dan 21. Adalah dijangkakan bahawa nilai median ini akan menumpu kepada batas atas Hurwitz' pada median ke 24, 27 dan seterusnya pada setiap median yang ke-3n dengan n adalah integer.

Berdasarkan Jadual 1 juga, didapati bahawa $\frac{7}{4}$ mempunyai panjang larian sebanyak 3 sebagai batas atas. $\frac{26}{15}$, $\frac{97}{56}$, $\frac{362}{209}$, $\frac{1351}{780}$ dan $\frac{5042}{2911}$ juga mempunyai panjang larian 3 sebagai batas atas. Bagi $\frac{18817}{10864}$ pula, adalah dijangkakan ia juga mempunyai panjang larian 3 sebagai batas atas. Namun oleh kerana dalam kajian ini median hanya dikira hingga ke-22 sahaja, maka didapati dalam Jadual 1,

$\frac{18817}{10864}$ mempunyai panjang larian 1 sahaja. Berdasarkan kepada Rowland (1999), panjang larian yang lebih menunjukkan hampiran yang lebih baik. Maka berdasarkan panjang larian, kesemua hampiran adalah hampir sama baik.

Jadual 2: Hampiran rasional bagi $\sqrt{3}$ yang memenuhi Teorem Hurwitz'

Median ke-	$\frac{M_1}{M_2}$	**E = Ralat**	$M = \frac{1}{\sqrt{5}(M_2)^2}$	$\frac{E}{M}$
3	$\frac{7}{4}$	0.017949	0.02791	0.64217
6	$\frac{26}{15}$	0.001283	0.001988	0.645258
9	$\frac{97}{56}$	0.000092	0.000143	0.645477
12	$\frac{362}{209}$	0.00000661	0.0000102	0.645454
15	$\frac{1351}{780}$	0.000000474	0.000000735	0.644911
18	$\frac{5042}{2911}$	0.0000000336	0.0000000528	0.637328
21	$\frac{18817}{10864}$	0.0000000020	0.00000000379	0.531717

Berdasarkan Jadual 2, nilai batasan atas Hurwitz' $\frac{E}{M}$ meningkat dari median ke-3 hingga median ke-9. Manakala dari median ke-9 hingga ke 21, nilai $\frac{E}{M}$ menurun. Juga didapati pada median ke-21 nilai $\frac{E}{M}$ adalah yang paling minima berbanding $\frac{E}{M}$ pada median-median yang lain. Oleh itu, median ke-21 mungkin sesuai dipilih sebagai hampiran terbaik bagi $\sqrt{3}$. Namun begitu, median ke-21 ini iaitu $\frac{18817}{10864}$ mempunyai penyebut yang sangat besar. Justeru itu, untuk memudahkan pengiraan hampiran terbaik dipilih mengikut kategori penyebutnya. Bagi penyebut yang kurang daripada 10, hampiran terbaik bagi $\sqrt{3}$ ialah $\frac{7}{4}$ dengan ralatnya 0.017949. Manakala bagi penyebut yang kurang daripada 200, median ke-9 iaitu $\frac{97}{56}$ merupakan hampiran terbaik bagi $\sqrt{3}$ dengan ralatnya 0.000092. Median ke-9 ini, betul kepada 3 tempat perpuluhan .

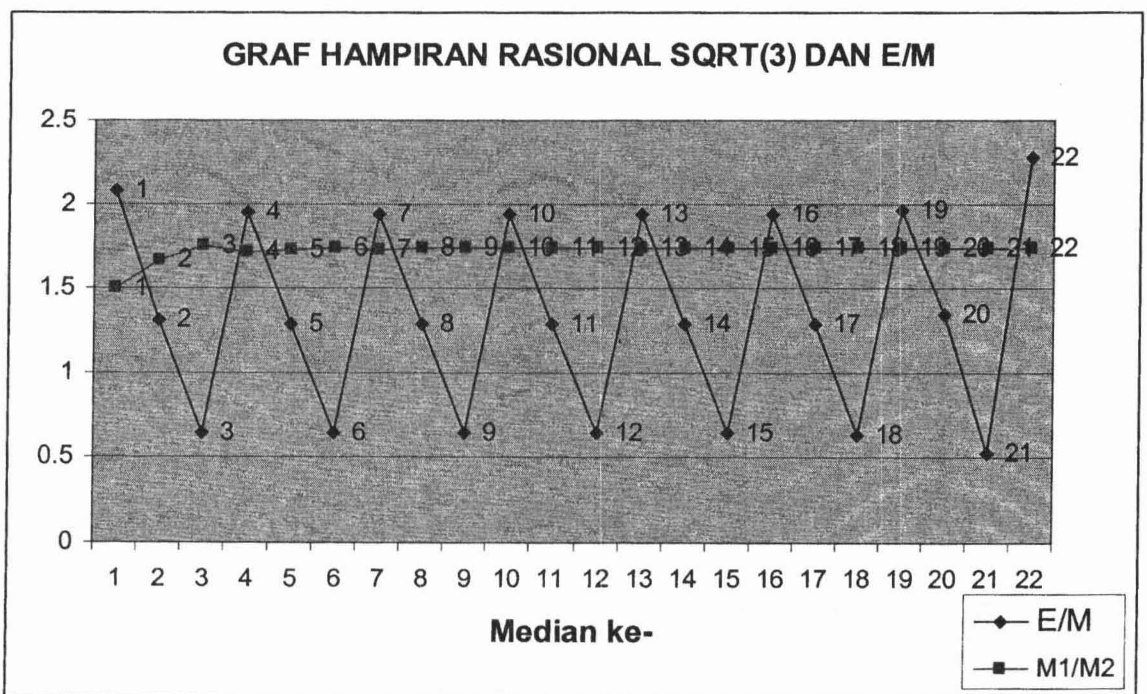
PERBANDINGAN $\sqrt{3}$ DENGAN π DAN $\sqrt{2}$

Berdasarkan Jadual 3, didapati bahawa nilai minima $\frac{E}{M}$ adalah bagi π, diikuti oleh $\sqrt{3}$ dan seterusnya $\sqrt{2}$. Tiada hampiran bagi $\sqrt{3}$ yang mempunyai $\frac{E}{M}$ seminima 0.13 apatah lagi 0.0007. Ini menunjukkan bahawa, $\sqrt{3}$ adalah lebih tak rasional jika dibandingkan dengan π. Di samping itu, tiada hampiran bagi $\sqrt{3}$ yang mempunyai $\dfrac{E}{M}$ semaksima 0.7906. Ini menunjukkan bahawa $\sqrt{2}$ adalah lebih tak rasional daripada $\sqrt{3}$.

Jadual 3: E/M bagi hampiran $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ dan π untuk penyebut kurang daripada 10 dan 200

Nombor tak rasional	$\dfrac{p}{q}$	**E = Ralat**	$M = \dfrac{1}{\sqrt{5}q^2}$	$\dfrac{E}{M}$
$\sqrt{3}$	$\dfrac{7}{4}$	0.017949	0.02791	0.64217
	$\dfrac{97}{56}$	0.000092	0.000143	0.645477
$\sqrt{2}$	$\dfrac{7}{5}$	0.0142	0.0179	0.7945
	$\dfrac{239}{169}$	0.0000124	0.0000156	0.7906
π	$\dfrac{22}{7}$	0.00126449	0.009127	0.1385
	$\dfrac{355}{113}$	0.000000266	0.0000350	0.0007

Bagi penyebut yang kurang daripada 10, $\sqrt{3}$ adalah 4.6 kali lebih tak rasional daripada π dan $\sqrt{2}$ adalah 1.24 kali lebih tak rasional daripada $\sqrt{3}$. Manakala bagi penyebut yang kurang daripada 200, $\sqrt{3}$ adalah 922 kali lebih tak rasional daripada π dan $\sqrt{2}$ adalah 1.22 kali lebih tak rasional daripada $\sqrt{3}$. Ini menunjukkan bahawa $\sqrt{3}$ adalah jauh lebih tak rasional daripada π tetapi tidak ketara kurang ketakrasionalannya daripada $\sqrt{2}$.



KESIMPULAN

Melalui kaedah Median Hurwitz' didapati bahawa nilai hampiran rasional terbaik bagi $\sqrt{3}$ dengan penyebut kurang daripada 10 ialah $\frac{7}{4}$. Manakala, hampiran rasional terbaik bagi $\sqrt{3}$ dengan penyebut kurang daripada 200 ialah $\frac{97}{56}$. Perbandingan darjah ketakrasionalan di antara $\sqrt{3}$ dengan π menunjukkan bahawa $\sqrt{3}$ adalah jauh lebih tak rasional daripada π dan $\sqrt{3}$ pula adalah kurang tak rasional daripada $\sqrt{2}$. Namun begitu, perbezaan ketakrasionalan antara $\sqrt{3}$ dan $\sqrt{2}$ adalah agak kurang ketara. Susunan ketakrasionalan bagi π, $\sqrt{3}$ dan $\sqrt{2}$ seperti di Rajah 2.

$$\pi \qquad\qquad \sqrt{3} \qquad\qquad \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\hspace{8cm}}$$

Darjah ketakrasionalan semakin bertambah

Rajah 2: Darjah ketakrasionalan bagi $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ dan π

RUJUKAN

Barrow, J.D. (2000). *The Secret Life of Continued Fractions.* http://plus.maths.org/issue11/features/cfractions/. Accessed on 20 June 2005.

Butcher, J. (No date). *Approximation of Irrational Numbers by Rational Numbers.* http://www.math.auckland.ac.nz/~butcher/miniature/apology3.pdf. Accessed on 3 August 2005.

Lacey, A.(2004). *Rational Approximation to Real Numbers.* http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewl/F14PA2/list/node47.html. Accessed on 23 July 2005.

Milinovich, M.B.(2004). *Irrationality, Transcendence and Approximation.* http://www.cs.bris.ac.uk/~colin/evollect1/evollect0/sldo76.htm. Accessed on 4 June 2005.

Nazirah, R. & Amirah Hana, M.N. (2003). *Keistimewaan 'pi'*. Jurnal Gading. (1& 2), 112 – 121.

Nazirah, R. (2004). *Mengenali Nombor Tak Rasional.* Prosiding KONAKA. (77-84). UPENA.

Rowland, T. (1999). *Rational and Irrational Numbers.* http://nrich.maths.org.uk/mathsf/journalf/jul99/art1/index.html. Accessed on 4 June 2004.

Phillips, T. (2000). *The most irrational numbers. .* http://www.ams.org-in-math/cover/irrational2.html. Accessed on 13 December 2003.

Tall, D & Mills, J. (No date). *Modelling Irrational Numbers in Analysis using Elementary Programming.* http://www.warwick.ac.uk/staff/**David.Tall**/pdfs/dot1992g-**mills-irrationals**.pdf. Accessed on 4 June 2004.

Walsh, S. (2000). Irrational Numbers. http://faculty.ed.umuc.edu/~swalsh/Math%20Articles/Irrational%20Numbers.html. Accessed on 13 December 2003.