MENGENALI NOMBOR TAK RASIONAL

Nazirah Ramli
Faculty of Information Technology and Quantitative Science, Universiti Teknologi MARA Pahang
nazirah@pahang.uitm.edu.my

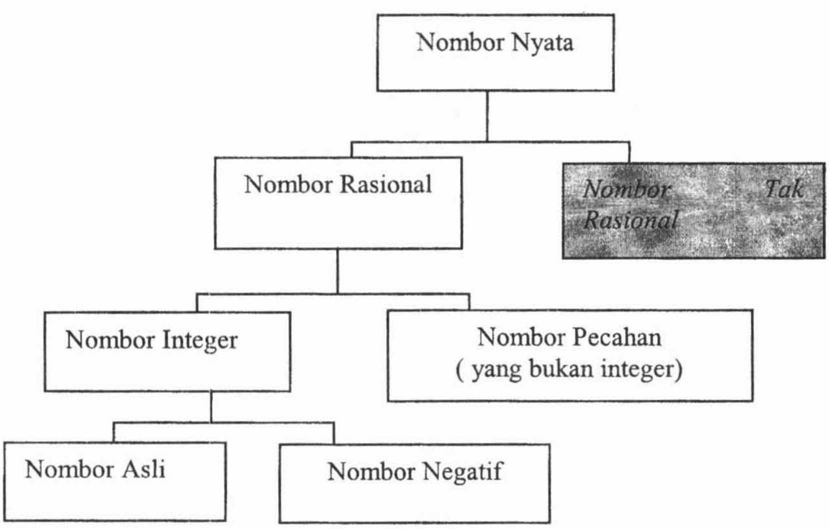
ABSTRAK

Nombor tidak rasional yang mendominasikan nombor nyata, merupakan nombor yang jarang diperbincangkan secara terperinci. Kertas kerja ini memfokuskan definisi dan sifat nombor tak rasional. Jenis-jenis nombor tak rasional seperti nombor punca kuasa, fungsi trigonometri, logaritma, pi, *e*, pemalar Erdos-Borwein, pemalar Apery dan nombor keemasan Phi turut diperbincangkan.

PENDAHULUAN

Kebanyakan kita pernah mempelajari tentang sistem pernomboran samada sewaktu di peringkat persekolahan menengah mahupun di peringkat pengajian tinggi. Sistem pernomboran boleh diklasifikasikan kepada beberapa jenis nombor iaitu nombor kompleks, nyata, integer, asli, rasional dan tak rasional. Secara umumnya, kita sangat mesra dengan nombor integer yang terdiri daripada nombor asli dan nombor negatif. Kita sangat mengenali nombor pecahan yang seringkali digunakan dalam kehidupan seharian. Kedua-dua jenis nombor tersebut merupakan nombor rasional. Namun begitu sejauh manakah pula kita mengenali nombor tak rasional?

Rajah 1: Klafisifikasi Nombor



Sebenarnya kita tidak akan mampu memahami sepenuhnya tentang sifat nombor tak rasional kerana tak rasional itu sendiri menggambarkan tidak logik, pelik, tidak masuk akal dan tidak dibimbing oleh logik taakulan. Namun kriteria itulah yang menarik untuk dikaji agar kita dapat mengenali sedikit sebanyak sifat nombor yang tanpa disedari biasa kita gunakan dan mendominasikan nombor-nombor yang wujud di alam nyata ini biarpun tidak dapat memahami sepenuh sifatnya.

TAKRIFAN

Umumnya, untuk mengenali nombor tak rasional, kita seharusnya terlebih dahulu memahami nombor rasional. Ringkasnya, ia adalah nombor integer, pecahan dan nombor desimal iaitu nombor-nombor yang biasa digunakan dalam kehidupan seharian. Terdapat buku teks dan maklumat dari internet yang menyifatkan bahawa nombor rasional ialah semua nombor desimal yang mempunyai titik desimal yang finit atau mempunyai titik desimal yang infinit tetapi digitnya berulang-ulang. Secara matematiknya, nombor rasional ialah nombor yang boleh dinyatakan sebagai nisbah dua integer $\frac{a}{b}$ dengan b bukan sifar atau ditulis sebagai $\left\{x \middle| , x = \frac{a}{b}, x \in \Re, a, b \text{ nombor integer dan } b \neq 0\right\}$.

Nombor tak rasional pula ialah suatu nombor nyata yang boleh ditulis dalam bentuk desimal tetapi tidak boleh ditulis dalam bentuk pecahan. Nombor tak rasional mempunyai kembangan desimal yang tiada henti dan kembangan desimalnya tidak berkala. Oleh itu, nombor tak rasional ialah nombor nyata yang tidak boleh diungkapkan dalam bentuk nisbah dua integer $\frac{a}{b}$ dan bagi sebarang a, b integer dan b bukan sifar atau ditulis sebagai $\left\{x \middle| , x \in \Re, x \neq \frac{a}{b} a, b \text{ nombor integer dan } b \neq 0\right\}$.

SIFAT NOMBOR TAK RASIONAL

Gabungan antara nombor rasional dan tak rasional akan membentuk nombor nyata. Namun begitu, nombor tak rasional mendominasikan gabungan tersebut kerana hampir keseluruhan nombor nyata terdiri daripada nombor tak rasional. Jika kita memilih nombor tak rasional secara rawak daripada nombor nyata, maka kebarangkalian untuk mendapatkan nombor tak rasional adalah menghampiri satu. George Cantor (1845 – 1918) telah membuktikan bahawa kebanyakan nombor pada garis nyata mengandungi nombor tak rasional.

Nombor tak rasional boleh dibahagikan kepada dua jenis iaitu nombor algebra dan nombor transendensal. Suatu nombor α dikatakan nombor algebra jika ia merupakan punca bagi polinomial berbentuk $f(x) = a_n x^n + \mathrm{K} + a_1 x + a_0$ dengan $f(x)$ bukan sifar dan koefisiennya adalah nombor rasional. Suatu nombor kompleks (yang mungkin nombor nyata) adalah transendensal jika bukan nombor algebra.

Bukan semua nombor algebra adalah tak rasional tetapi semua nombor transendensal adalah tak rasional. Umumnya, hampir semua nombor tak rasional terdiri daripada nombor transedensal.

Terdapat perbezaan jurang yang luas di antara nombor tak rasional dan nombor rasional. Namun begitu, kedua-dua nombor ini mempunyai kesinambungannya yang tersendiri. Sebagai contohnya, di antara dua nombor rasional (tidak kira berapa hampir kedua-dua nombor tersebut) akan wujud nombor tak rasional. Begitu juga di antara dua nombor tak rasional (tanpa mengira berapa hampir nombor itu) akan wujud nombor rasional. Sebagai contohnya, di antara nombor rasional 4.6346834683 dan 4.6346834684 , wujud nombor tak rasional 4.63468346839742...Begitu juga di antara nombor tak rasional 7.4367110893... dan 7.4367110894..., akan wujud nombor rasional $7.436711894\bar{0}$. Ini bermaksud nombor rasional dan tak rasional muncul atau wujud secara berturutan dan tiada yang menghalang di antara kedua nombor tersebut.

SEJARAH KEWUJUDAN NOMBOR TAK RASIONAL

Nombor tak rasional dikatakan bermula pada zaman Phytagoras dan pengikutnya. Dalam penemuan ini mereka membuktikan secara geometri ketakrasionalan nombor $\sqrt{2}$. Dalam salah satu cerita mengatakan bahawa salah seorang pengikut Phytagoras yang bernama Hippasus telah menemui nombor tak rasional apabila cuba menyatakan nombor $\sqrt{2}$ sebagai pecahan. Walaubagaimanapun, Phyatagoras yang pada masa itu hanya mempercayai kemutlakan nombor tidak dapat menerima kewujudan nombor tak rasional. Beliau tidak dapat menerima secara logik tentang kewujudan nombor tak rasional dan lantaran itu beliau telah menjatuhkan hukuman mati kepada Hippasus dengan cara melemaskannya.

Pada tahun Masehi ke 16, menampakkan penerimaan kepada nombor pecahan. Manakala pada tahun Masehi ke 17 pula, ahli Matematik telah mula menulis nombor pecahan dalam bentuk tempat perpuluhan. Pada tahun ke 19 Masehi, bidang Matematik semakin berkembang dengan kemajuan nombor tak rasional yang diklasifikasikan sebagai nombor algebra dan transendensal. Perbezaan antara nombor transendensal dan nombor algebra pertama kali ditemui oleh Kronecker. Pada tahun 1761, Lambert telah membuktikan bahawa π adalah tak rasional. Beliau menggunakan kembangan pecahan bagi $\frac{e-1}{2}$ yang telah diperolehi oleh Euler untuk mendapatkan kembangan bagi fungsi tan x dan $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Berdasarkan kembangan tersebut, beliau telah menunjukkan bahawa tan x dan e^x adalah tak rasional bagi sebarang nombor rasional x yang bukan sifar. Pada tahun 1794, Legendre memperbaiki pembuktian Lambert dan telah berjaya menunjukkan bahawa π bukanlah punca kuasa dua bagi nombor rasional.

Pada tahun 1840 Joseph Liouville telah menunjukkan bahawa e mahupun e^2 tidak boleh menjadi punca bagi persamaan polynomial berbentuk $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ dengan $f(x)$ bukan sifar yang mempunyai koefisien nombor rasional. Seterusnya, pada tahun 1844 Liouville telah berjaya membuktikan kewujudan nombor transedensal. Pada tahun 1873, Charles Hermite telah membuktikan bahawa e adalah transendensal. Dengan menggunakan pembuktian Hermite, Lindemann pada tahun 1882 telah membuktikan bahawa π juga adalah transendensal.

JENIS-JENIS NOMBOR TAK RASIONAL

Fungsi Punca Kuasa

Nombor tak rasional algebra yang biasa digunakan dan diketahui umum ialah $\sqrt{2}$ atau juga disebut sebagai pemalar Phytagoras. Namun begitu, nombor tak rasional bukan hanya setakat punca kuasa dua bagi dua sahaja, tetapi juga termasuk nombor punca kuasa dua bagi semua nombor perdana. Ini bermakna bagi setiap nombor perdana p, maka $\sqrt{p}$ ialah nombor tak rasional. Contoh-contoh nombor tak rasional ialah $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ dan lain-lain lagi. Oleh kerana terdapat ketakterhinggaan bilangan nombor perdana, maka justeru itu juga terdapat ketakterhinggaan bilangan nombor tak rasional. Bagi n yang bukan kuasa dua sempurna, pembuktian $\sqrt{n}$ tak rasional adalah sama seperti pembuktian kontradiksi $\sqrt{2}$. Pada tahun 1994, Papp menggunakan hukum logaritma untuk membuktikan ketakrasionalan $\sqrt{2}$. Kaedahnya juga boleh digunakan untuk menunjukkan ketakrasionalan punca kuasa tiga dan ke atas bagi nombor dua serta punca kuasa dan kuasa tiga bagi nombor yang bukan kuasa dua sempurna seperti $\sqrt[3]{5}$.

Fungsi Trigonometri

Bagi beberapa sudut istimewa seperti sudut 0^o,30^o dan 90^o, nilai sin bagi sudut tersebut adalah nombor rasional. Namun begitu, dalam banyak kes, nilai sin bagi sudut-sudut lain ialah nombor tak rasional. Sebagai contohnya sin 70^o, sin 45 dan sin 20 . Selain daripada itu, bagi kebanyakan sudut, nilai kosin dan tangennya juga merupakan nombor tak rasional. Menurut Stevens (1999), cos r ialah nombor bukan rasional bagi setiap nombor rasional tak negatif r. cos θ juga nombor tak rasional bagi setiap sudut rasional $0^o < \theta^o < 90^o$ dengan pengecualian pada $\theta = 60^o$ (Niven, 1956). tan r juga ialah nombor tak rasional bagi setiap nombor rasional $r \neq 0$ (Steven, 1999). Jika cos 2θ adalah tak rasional, begitu juga dengan cos θ, sin θ dan tan θ.

Fungsi Logaritma

Nombor tak rasional juga boleh diperolehi apabila kita menglogkan sesuatu nombor. $\log_n m$ adalah tak rasional jika m dan n adalah integer dengan syarat salah satu dan bukan kedua-duanya mempunyai faktor perdana. Sebagai contohnya log 5 dengan asas 10. Pada tahun 1744, Euler telah menyatakan tanpa pembuktian bahawa nombor dalam bentuk $\log_a b$ adalah nombor transedensal di mana a dan b nombor rasional dan b bukan kuasa rasional bagi a.

Pi

Nisbah perimeter bulatan kepada diameternya iaitu pi atau dinotasikan dengan huruf Greek π juga merupakan nombor tak rasional. Secara amnya, π^n adalah tak rasional bagi nombor n positif. Hampiran yang biasa digunakan bagi π bersamaan dengan $\frac{22}{7}$ dengan ralat 0.00126. Nilai hampiran bagi pi ini telah dikaji sejak berabad-abad lamanya iaitu semenjak tahun 2000 SM iaitu semasa Zaman Tamadun Babylon dengan nilainya 3.125. Pada tahun 250 SM, Archimedes secara teori telah mendapatkan nilai π terletak antara $3\frac{10}{71}$ dan $3\frac{1}{7}$. Seterusnya, hinggalah kini dengan kecanggihan teknologi komputer, pi dihampirkan sehingga jutaan tempat perpuluhan.

e

Nombor *e* iaitu asas bagi logaritma asli juga merupakan nombor tak rasional. Nombor *e* yang bernilai 2.71828182845094523530 6...ini diperkenalkan oleh John Napier dalam kajiannya tentang logaritma pada awal tahun 1600. Generalisasinya e^r adalah tak rasional bagi setiap nombor rasional r ≠ 0. Ketakrasionalan *e* dibuktikan oleh Euler pada tahun 1737. Euler memberi nilai hampiran $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \Lambda$ serta $e = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^n$. Euler juga memberi kembangan pecahan bagi *e* iaitu

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+K}}}}}$$

dan

$$e-1 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+K}}}}}}}}$$

Pemalar Erdos-Borwein

Menurut Bailey dan Crandall (2001), pemalar Erdos-Borwein iaitu 1.606695152415291763... ialah nombor tak rasional. Pemalar Erdos-Borwein E atau kadangkala dinotasikan sebagai α ialah hasil tambah salingan nombor-nombor Mersenne dan ditakrifkan sebagai $E = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n - 1}$. Erdos telah membuktikan bahawa pemalar *E* adalah tak rasional. Manakala Borwein (1992) pula telah menunjukkan bahawa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q^n - r}$ dengan $r \neq 0$ adalah tak rasional.

Pemalar Apery

Pemalar Apery yang ditakrifkan sebagai $\zeta(3) = 1.2020569...$ juga tak rasional dengan $\zeta(x)$ ialah fungsi Zeta Riemann (Apery, 1979) dan $\zeta(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{e^u - 1}du$ bagi *x*>1 dan $\Gamma(x)$ ialah fungsi Gamma. Namun begitu, masih tidak diketahui sama ada pemalar Apery ini transendensal atau tidak. Pemalar Apery $\zeta(3)$ biasa digunakan dalam menyelesaikan masalah fizik iaitu termasuklah nisbah giromagnetik elekton peringkat kedua dan ketiga serta untuk mengira kuantum elektrodinamik.

Ketakrasionalan nilai fungsi Zeta-Riemann bukan hanya setakat $\zeta(3)$ sahaja. Pada tahun 2000, Rivoal telah membuktikan bahawa terdapat ketakterhinggan fungsi Zeta-Rieman yang tak rasional dengan x = 2n+1 dan n ialah integer seperti $\zeta(5)$, $\zeta(7)$ dan lain-lain lagi.

Phi Nombor Keemasan

Suatu lagi nombor tak rasional yang terkenal ialah Phi atau juga dikenali sebagai Nombor Keemasan. Phi sebenarnya merupakan penyelesaian bagi persamaan kuadratik $x^2 - x - 1 = 0$. Setelah diselesaikan diperolehi punca-punca ialah $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\Lambda$ atau $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618\Lambda$. Selain daripada itu, Phi juga boleh dinyatakan sebagai dua siri berikut iaitu $\text{Phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\text{K}}}}$ atau $\text{Phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\text{K}}}}}$.

Phi nombor keemasan yang secara hampirannya bernilai 1.6180339887498948482... ialah nombor yang paling tidak rasional jika dibandingkan dengan π atau $\sqrt{2}$. Nombor Keemasan ini tidak akan mempunyai hampiran rasional sebaik $\frac{22}{7}$ bagi π atau sama baik dengan $\frac{7}{5}$ bagi $\sqrt{2}$.

Nombor keemasan Phi ini juga seringkali dikaitkan dengan jujukan nombor Fibonacci 0 ,1 ,1 ,2 ,3 ,5 ,8 ,13 ,... kerana nisbah jujukan nombor Fibonacci 1, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, ... menumpu kepadanya. Ini bermakna semakin tinggi nisbah jujukan nombor Fibonacci, nilai tersebut akan semakin menghampiri Phi.

Nombor keemasan Phi ini juga amat istimewa kerana bentuk-bentuk geometri yang melibatkannya mempunyai nilai astetik yang tinggi. Bagi suatu pentagon yang bersisi satu, phi merupakan panjang pepenjurunya.

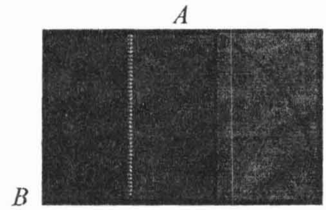
Bagi suatu garis lurus (Rajah 2) dengan segmen A dan B dan dengan syarat $\frac{A+B}{A} = \frac{A}{B}$, diperolehi nisbah segmen A ke B iaitu $\frac{A}{B}$ atau dikatakan sebagai Nisbah Keemasan adalah menghampiri 1.618...

Rajah 2: Garis Lurus dengan Segmen *A* dan *B*

$\frac{A+B}{A} = \frac{A}{B}$ $\qquad$ $\frac{A}{B} = 1.618\Lambda$

Suatu lagi bentuk geometri yang biasa dikaitkan dengan Phi ialah Segiempat Tepat Keemasan. Segiempat Tepat Keemasan merupakan suatu segiempat tepat yang bila dilihat, amat menyenangkan mata memandang. Bagi Segiempat Tepat Keemasan dengan panjang A dan lebar B, nisbah panjang A kepada lebar B merupakan Nisbah Keemasan.

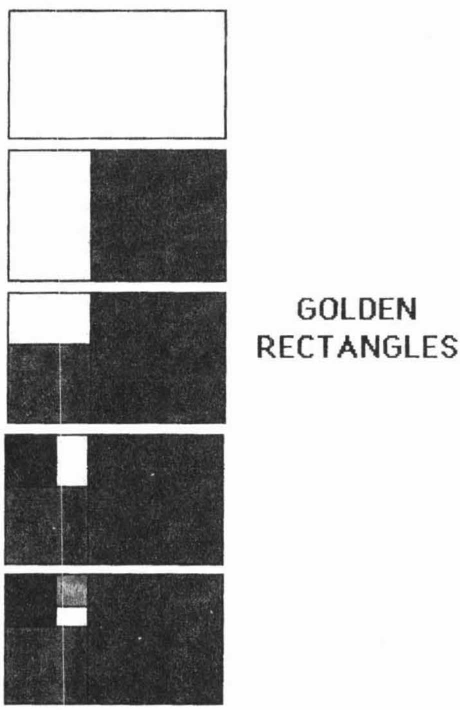
Rajah 3 : Segiempat Tepat Keemasan



$$\frac{A}{B} = 1.618K$$

Jika dibuang satu segiempat sama dari segiempat tepat keemasan, segiempat yang tinggal juga masih merupakan suatu segiempat keemasan (Rajah 4).

Rajah 4: Segiempat Tepat Keemasan

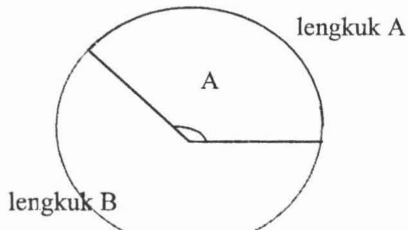


Bagi suatu bulatan yang panjang lengkuknya dibahagi dua dengan Nisbah Keemasan, maka didapati bahawa sudut kecil yang terkandung oleh lengkuk dinamakan sebagai Sudut Keemasan yang bersamaan dengan 137.5 darjah.

Rajah 5: Sudut Keemasan *A*

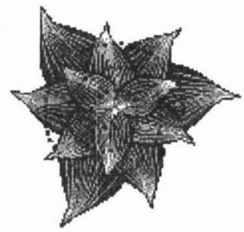
$$\frac{\text{panjang lengkuk B}}{\text{panjang lengkuk A}} = 1.618\ldots$$

Sudut A = 137.5°.



Sudut Keemasan 137.5° ini juga biasa dikaitkan dengan filotaksis iaitu susunan atau struktur dedaun bagi pokok yang mana sudut antara dua kelopak ialah 137.5° (Rajah 6).

Rajah 6: Sudut antara Kelopak 137.5°



Nisbah keemasan, segiempat keemasan, segitiga keemasan mahupun sudut keemasan memainkan peranan penting dalam pelbagai bidang seni terutamanya senibina, seni muzik dan seni lukis. Selain daripada menghasilkan sesuatu bentuk geometri yang amat menyenangkan pandangan mata, ia juga membentuk sesuatu hasil yang sangat harmoni. Adalah dikatakan Mozart pernah menggunakan nombor ini untuk menghasilkan sonata yang amat sedap didengar.

RUMUSAN

Nombor tak rasional punca kuasa, fungsi trigonometri, fungsi logaritma, pi, *e*, pemalar Erdos-Borwein, pemalar Apery dan nombor keemasan Phi hanyalah sebahagian kecil daripada nombor-nombor tak rasional yang wujud. Biarpun nilai yang diberi kepada nombor tak rasional ini sehingga berjuta tempat perpuluhan, ia hanyalah suatu hampiran sahaja. Tiada nilai yang tepat baginya. Walaupun begitu, nombor-nombor ini mempunyai rahsia dan keistimewaan yang tersendiri.

RUJUKAN

Apery, R. (1979). *Irrationalite de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$. Asterisque 61, pp: 11 – 13.

Beukers, F. (1979). *A note on the Irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$. Bull. London Math. Soc. 11, 268

Borwein, P. (1992). *On the Irrationality of Certain Series*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 112, pp: 141 – 146.

Castellanos, D. (1988). *The Ubiquitous Pi. Part I*. Math. Mag. 61. pp: 67 – 98.

Freitag, M. *Phi: That Golden Number*. http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student. Folders/Frietag.Mark/Homepa.../goldenratio.htm. Accessed 12/13/2003

Gosper, R.W. (1990). Strip Mining in the Abandoned Orefields of Nineteenth Century Mathematics. In D.V. Chudnovsky and R.D. Jenks (ed.). Mathematics New York : Dekker

Gosper, R.W. (1996). *Zeta(3) to 250,000 Digits*. In Apery's Constant. http://mathworl.wolfram.com/AperysConstant.html. Accessed 5/14/2004.

Haible, B. and Papanikolaou, T. (1997). *Fast Multiprecision Evaluation of series of Rational Numbers*.TI-97-7. Darmstadt, Germany: Darmstadt University of Technology.

Jin, Y. and Dickinson, H. (2000). *Apery Sequences and Legendre Transforms*. J. Austral. Math. Soc. Sec 356.

_____________. *Mersenne Number*. http://mathworld.wolfram.com/MersenneNumber.html.

Niven, I.M. (1956). *Irrational Numbers*. New York : John Wiley and Sons.

Papp, F.J. (1992). *"$\sqrt{2}$ is Irrational"*. International Journal of Mathematical Education, Vol. 25, No.1, pp: 61- 67.

Shidlovskii, A.B. (1989). *Transcendental Numbers*. Berlin : Walter de Gruyter & Co.

Sondow, J. Riemann. *Zeta Function*. http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html. Accessed 5/14/2004.