Perbandingan antara Kaedah Penguraian Adomian Multiperingkat (*Multistage Adomian Decomposition Method* [MADM]) dengan Kaedah Lelaran Bervariasi Multiperingkat (*Multistage Variational Iteration Method* [MVIM])

Mat Salim Selamat

ABSTRAK

Dalam artikel ini, dua kaedah berangka dibandingkan untuk memberi penyelesaian hampiran bagi satu sistem persamaan pembezaan biasa. Hasil pengiraan dibandingkan dengan kaedah konvensional Runge-Kutta peringkat keempat bagi menentukan kaedah yang lebih cekap.

Kata kunci : *Kaedah lelaran bervariasi, kaedah penguraian Adomian*

Pendahuluan

Dalam dunia sebenar, pemodelan matematik diperlukan bagi memberi takrifan kepada sistem biologi, fizik, kimia dan sebagainya. Lazimnya juga, pemodelan matematik ini adalah dalam bentuk persamaan pembezaan biasa dan separa. Masalah yang sering ditemui adalah sistem persamaan pembezaan tidak mempunyai nilai penganalisaan yang tepat. Oleh itu, teknik penghampiran beranalisis dan berangka seperti kaedah Runge-Kutta adalah diperlukan.

Sebagai alternatif, kaedah-kaedah terkini seperti kaedah penguraian Adomian (*Adomian decomposition method*) dan kaedah lelaran bervariasi (*variational iteration method*) dibina. Walau bagaimanapun kedua-dua kaedah ini terbukti mempunyai beberapa kelemahannya. Sebagai contohnya, bagi persamaan berbentuk evolusi taklinear (*nonlinear evolution equations* /NLEE]), kedua-dua kaedah hanya jitu pada julat masa yang singkat dan gagal pada julat masa yang panjang. Oleh itu pengubahsuaian dilakukan kepada kedua-dua kaedah ini melalui secara berperingkat.

Artikel ini bertujuan untuk menunjukkan perbandingan kedua-dua kaedah berperingkat dalam memodelkan tindak balas biokimia Michaelis-Menten seperti dalam Segel (1980) dan Sen (1988):

$$\frac{dx}{dt} = -x + (\beta - \alpha)y + xy \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\beta}{\varepsilon}y - \frac{xy}{\varepsilon} \qquad (2)$$

Dengan syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Persamaan (1) – (2) merupakan persamaan pembezaan biasa yang lebih umum iaitu mengandungi sebutan tak linear yang terhasil daripada hasil darab dua pembolehubah bebas. Berdasarkan kajian oleh Olek (1994) sistem umum ini diberi sebagai berikut:

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i\left(b_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}N_j\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (3)$$,

tertakluk kepada $N_{1,0} = c_1, N_{2,0} = c_2, \ldots, N_{i,0} = c_i$.

Penyelesaian Kaedah Penguraian Adomian Multiperingkat (MADM)

Daripada persamaan (3) dan berdasarkan Adomian (1989), Olek (1994), Vadasz dan Olek (2000) dan Hashim et al. (2006), telah membentuk skema kaedah penguraian Adomian multiperingkat yang memberikan bentuk penyelesaian seperti berikut:

$$N_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{im} \frac{(t - t^*)^m}{m!}, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4)$$

Pekali-pekali d_{im} seperti dalam Vasdasz dan Olek (2000) ialah:

$$d_{i0} = N_i(t^*) \tag{5}$$

$$d_{im} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_{j(m-1)} + (m-1)! \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=0}^{m-1} a_{ipq} \frac{d_{qk}}{k!} \frac{d_{p(m-k-1)}}{k!(m-k-1)!}, \quad m \geq 1 \tag{6}$$

Oleh itu penyelesaian persamaan (1) – (2) seperti dalam Hashim dan Selamat (2007) dan Selamat (2006) ialah:

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{(t-t^*)^m}{m!} \tag{7}$$

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{(t-t^*)^m}{m!} \tag{8}$$

Pekali-pekali adalah diberi oleh hubungan berulangan

$$b_0 = x(t^*), \qquad c_0 = y(t^*) \tag{9}$$

$$b_m = (\beta - \alpha) c_{m-1} - b_{m-1} + (m-1)! \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_m c_{m-k-1}}{k!(m-k-1)!}, \quad m \geq 1$$

(10)

$$c_m = \frac{1}{\varepsilon} b_{m-1} - \frac{\beta}{\varepsilon} c_{m-1} - \frac{1}{\varepsilon}(m-1)! \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_m c_{m-k-1}}{k!(m-k-1)!}, \quad m \geq 1 \tag{11}$$

Seperti yang ditunjukkan dalam Adomian (1989) dan digunakan dalam Olek (1994), Guellal et al. (1997), Vadasz dan Olek (2000), Shawagfeh dan Kaya (2004) dan Hashim et al. (2006), MADM ialah sebagai satu algoritma untuk penghampiran tindak balas dinamik dalam satu jujukan selang masa $[0,t_1),[t_1,t_2),\ldots,[t_{m-1},T)$ supaya syarat awal dalam $[t^*, t_{m+1})$ merupakan keadaan pada t^*.

Penyelesaian Kaedah Lelaran Bervariasi Multiperingkat (MVIM)

Konsep asal kaedah lelaran bervariasi boleh dilihat dalam He (1997) dan He (2006). Bagi penyelesaian multiperingkat, fungsi pembetulan (*correction functional*) dibentuk sebagai :

$$N_{i,n+1}(t) = N_{i,n}(t) + \int_{t^*}^{t} \lambda_i(s) \left[\frac{dN_i}{ds} - N_{i,n} \left(b_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \tilde{N}_{i,n} \right) \right] ds \quad (12)$$

bagi, $i = 1, 2, \ldots, m$ dengan $n = 0, 1, 2, \ldots$ bilangan lelaran, $\tilde{N}_{i,n}$ dianggap variasi yang disekat, iaitu $\delta N_{i,n} = 0$. Dengan mengambil $\delta N_{i,n}(t^*) = 0$, akan terhasil syarat awal berikut:

$$1 + \lambda_i(t) = 0, \qquad \lambda'(s) + b_i \lambda(s) |_{s=t} = 0 \quad (13)$$

bagi $i = 1, 2, \ldots, m$. Oleh itu pengganda Langrange boleh ditentukan sebagai

$$\lambda_i(s) = -e^{-b_i(s-t)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \quad (14)$$

Seterusnya, dengan menggunakan persamaan (12) – (14), diperolehi algoritma lelaran bervariasi berikut yang digunakan untuk menyelesaikan secara hampiran persamaan (1) dan (2):

$$x_{i,n+1}(t) = x_n(t) - \int_{t^*}^{t} \{x'_{i,n}(\tau) + x_{i,n}(\tau) - (\beta - \alpha) y_{i,n}(\tau) - x_{i,n}(\tau) y_{i,n}(\tau)\} d\tau \quad (15)$$

$$y_{i,n+1}(t)=y_{i,n}(t)-\int_{t^*}^{t}\left\{y'_{i,n}(\tau)-\frac{1}{\varepsilon}\left(\beta x_{i,n}(\tau)-y_{i,n}(\tau)-x_{i,n}(\tau)y_{i,n}(\tau)\right)\right\}d\tau \tag{16}$$

dengan $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (17)

Sebagai perbandingan dengan Sen (1988), ditetapkan nilai-nilai, $\alpha = 0.375, \beta = 1.0$ dan $\varepsilon = 0.1$. Pengiraan dilakukan dengan menetapkan saiz langkah atau selang masa 0.001 bagi kaedah Runge-Kutta peringkat keempat (RK) dan 0.01 bagi MADM dan MVIM. Semua pengiraan menggunakan perisian MAPLE 11.

Keputusan

Jadual 1 menunjukkan perbandingan penyelesaian RK dengan MADM dan MVIM. Didapati bahawa beza maksima antara RK dengan MADM adalah dalam magnitud kuasa -10, manakala beza antara RK dengan MVIM dalam magnitud kuasa -9. Oleh itu, kedua-dua kaedah ini memberikan kejituan penyelesaian yang tinggi. Perbandingan kejituan ini juga dapat dilihat dalam Rajah 1.

Jadual 1 : Perbandingan Penyelesaian RK dengan MADM dan MVIM

Time	Runge-Kutta (0.001)	MADM (0.01)	MVIM (0.01)	RK-MADM	RK-MVIM
0.1	4.215195E-01	4.215195E-01	4.215195E-01	-1.839820E-10	1.994848E-09
0.2	4.736569E-01	4.736569E-01	4.736569E-01	-4.891604E-11	5.093320E-10
0.3	4.767635E-01	4.767635E-01	4.767635E-01	-1.014699E-11	1.021050E-10
0.4	4.730919E-01	4.730919E-01	4.730919E-01	-1.991018E-12	1.844797E-11
0.5	4.684372E-01	4.684372E-01	4.684372E-01	-4.520273E-13	2.925993E-12
0.6	4.636114E-01	4.636114E-01	4.636114E-01	-1.769696E-13	1.740275E-13
0.7	4.587306E-01	4.587306E-01	4.587306E-01	-1.279532E-13	-.979839E-13
0.8	4.538124E-01	4.538124E-01	4.538124E-01	-1.209588E-13	-.839706E-13
0.9	4.488603E-01	4.488603E-01	4.488603E-01	-1.200151E-13	-,249867E-13
1.0	4.438755E-01	4.438755E-01	4.438755E-01	-1.189604E-13	-4199974E-13

Perbincangan dan Kesimpulan

Hasil kajian menunjukkan bahawa kejituan pengiraan adalah hampir sama melalui kaedah konvensional Runge-Kutta peringkat keempat iaitu beza pengiraan adalah dalam magnitud 10^{-10} hingga 10^{-9}. MADM memberikan komponen-komponen untuk penyelesaian tepat iaitu yang mesti mengikut bentuk hasil tambah seperti dalam persamaan (3). MADM juga memerlukan penilaian polinomial Adomian yang melibatkan pengiraan algebra yang sangat banyak. Selain daripada itu, MADM menghasilkan penyelesaian dalam bentuk hasil tambah komponen-komponen yang membentuk siri penyelesaian. Dalam kajian ini, bagi selang 0.01 untuk julat masa 1, MADM menghasilkan 100 siri penyelesaian bagi setiap titik masa.

Manakala MVIM pula memberi kiraan hampir secara berturutan melalui lelaran *çorrection functional* serta memerlukan penghitungan pendarab Langrange melalui kaedah kalkulus bervariasi (*variational calculus*). MVIM juga menghasilkan penyelesaian dalam bentuk turutan lelaran. Dalam kes ini pengiraan dilakukan sehingga 6 lelaran sahaja. Selain daripada itu, MVIM mengurangkan kerja pengiraan yang banyak tanpa perlu menghitung polinomial Adomian seperti dalam MADM bagi sebutan tak linear.

Kesimpulannya, MVIM merupakan kaedah yang dapat mengurangkan kerja pengiraan yang banyak berbanding MADM. Oleh itu, didapati MVIM lebih cekap berbanding MADM.

Rujukan

Adomian, G. (1989). *Nonlinear stochastics systems theory and applications to physics*. Dordrecht: Kluwer.

Guellal, S., Grimalt, P., & Cherruault, Y. (1997). Numerical study of Lorenz's equation by Adomian method. *Comput Math. Appl.*, *33*,25-29.

Hashim, I., Noorani, M.S.M., Ahmad, R., Bakar, S.A., Ismail, E.S., & Zakaria, A.M. (2006). Accuracy of the Adomian decomposition method applied to the Lorenz system. *Chaos, Solitons & Fractals*, *28*,1149-1158.

Hashim, I ., & Selamat, M.S. (2007). Simulation of time-dependent enzyme kinetics by an explicit numeric-analytic technique. *Math. Comput. Model.* In Press.

He, J.H. (1997). A new approach to nonlinear partial differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, *2*(4), 230-5.

He, J.H. (2006). Variational iteration method – Some recent results and new interpretations. *J. Comput. Appl. Math*. In Press.

Mat Salim bin Selamat. (2006). P*enyelesaian sistem persaman fasa fana tindak balas Michaelis-Menten menggunakan kaedah penguraian Adomian dengan pembahagian selang*. Disertasi Sarjana. Universiti Kebangsaan Malaysia

Olek, S. (1994). An accurate solution to the multispecies Lotka-Volterra equations. *SIAM Rev.*, *36*(3),480-488.

Shawagfeh, N., & Kaya, D. (2004). Compairing numericals methods for the solu tions of sytems of ordinary differential equations. *Appl. Math. Lett.*, *17*, 323-328.

Segel, L.A. (1980). *Mathematichal models in molecular and cellular biology*. New York: Cambrige University Press.

Sen, A.K. (1986). An application of the Adomian decomposition methods to the transient behaviour of a model biochemical reaction. *J. Math. Anal. Appl.*, *131*, 232-245

Vadasz, P., & Olek, S. (2000). Convergence and accuracy of Adomian's Decomposition method for the solution of Lorenz equation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, *43*, 1715-1734.

MAT SALIM SELAMAT, Unit Matematik & Statistik, Universiti Teknologi MARA Pahang.