

KEISTIMEWAAN 'PI'

NAZIRAH RAMLI dan AMIRAH HANA MOHAMED NOR

Universiti Teknologi MARA Cawangan Pahang, 26400 Bandar Jengka, Pahang.

ABSTRAK

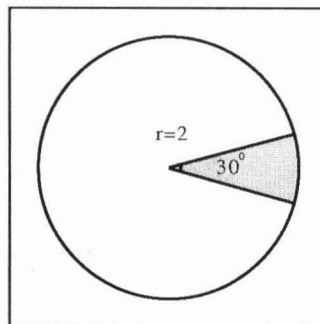
Pi atau π merupakan suatu nombor istimewa yang menjadi bahan kajian sejak berabad-abad lamanya. Kertas kerja ini memfokuskan sejarah kemunculan pi (π), penghampiran digitnya yang tiada berkesudahan serta beberapa mnemonik yang telah digunakan untuk menghafal nilai pi (π).

PENDAHULUAN

π merupakan simbol yang tidak asing di kalangan ahli matematik dan ahli sains. Tanpa disedari, π sebenarnya wujud sekitar kehidupan seharian kita terutama yang melibatkan bentuk-bentuk bulatan. π jelas terdapat pada cakera matahari dan bulan. π tersembunyi di sebalik pelangi yang muncul di kala hujan panas. Apabila air hujan menitik, π muncul sebagai gelang air yang merebak. Dan yang paling hampir dengan kita, π terdapat pada anak mata kita sendiri. Namun begitu sejauh manakah pengetahuan kita tentang nilai π ini?

Secara amnya, π digunakan untuk mencari luas, ukur lilit dan isipadu bagi bentuk-bentuk yang melibatkan bulatan. Dalam silibus kod Matematik di Universiti Teknologi Mara (UiTM), penggunaan π banyak dibincangkan dalam topik Trigonometri, Nombor Kompleks dan Kalkulus. π radian yang bersamaan dengan 180 darjah digunakan untuk mencari luas dan panjang lengkung suatu sektor bulatan. Sebagai contohnya, kita ingin mencari luas sektor bagi suatu bulatan berjajari dua unit yang dikandung oleh sudut 30 darjah (Rajah 1).

Rajah 1: Sektor berjajari 2



Dengan menggantikan sudut 30 darjah sebagai $\frac{\pi}{6}$ radian dan menggunakan formula luas sektor iaitu $\frac{1}{2}r^2\theta$, maka diperolehi luas sektor bersamaan dengan $\frac{\pi}{3}$ unit persegi.

Dalam topik Nombor Kompleks pula, π menyumbang suatu persamaan yang sangat terkenal yang dinamakan sebagai 'persamaan lima' iaitu $e^{\pi i} + 1 = 0$. Persamaan ini dinamakan sedemikian kerana ia mengandungi lima nombor penting dalam matematik iaitu 0, 1, e, π dan i.

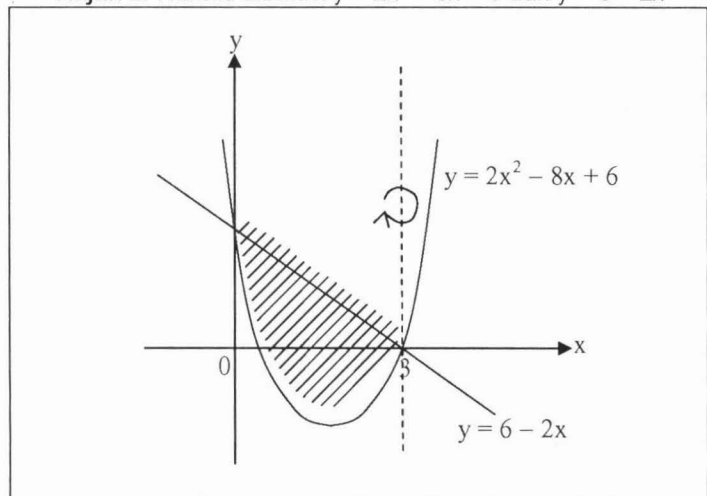
Selain itu, π juga penting dalam topik Statistik yang mana ia merupakan unsur penting dalam taburan Normal dengan fungsi ketumpatannya ialah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dengan x sebarang nombor nyata, μ dan σ masing-masingnya merupakan min dan sisihan piawai.

Manakala dalam topik Kalkulus pula, π digunakan untuk mencari isipadu bagi kawasan yang diputarakan sama ada dengan kaedah cakera, Shell, Washers dan irisan. Sebagai contoh, kita ingin mencari isipadu dengan kaedah Shell bagi kawasan yang dibatasi oleh lengkung $y = 2x^2 - 8x + 6$ dan $y = 6 - 2x$ dengan rantau tersebut diputarakan pada garis $x = 3$ (Rajah 2). Isipadunya ditulis sebagai $\int_0^3 2\pi(3-x)(6-2x - (2x^2 - 8x + 6))dx$. Setelah diselesaikan kamiran tersebut, isipadu yang diperolehi ialah 27π unit³.

Rajah 2: Rantau dibatasi $y = 2x^2 - 8x + 6$ dan $y = 6 - 2x$



Seringkali kita akan meninggalkan jawapan dalam sebutan π atau menggantikan nilai π sebagai pecahan $\frac{22}{7}$ atau 3.142 (kepada tiga tempat perpuluhan). Apa yang menjadi persoalan apakah sebenarnya nilai π ?

SEJARAH (PI)

Pi yang dinotasikan dengan huruf Greek π merupakan suatu nombor istimewa yang bersifat tak rational, transedensal dan tiada berkesudahan. Sifat tak rationalnya iaitu ia tidak boleh dinyatakan sebagai hasil bahagi dua nombor integer telah dibuktikan oleh Lambert pada tahun 1766. Manakala sifat transedensalnya pula iaitu bukan punca kepada sebarang persamaan aljabar atau aritmetik dengan koefisien nombor nisbah telah dibuktikan pada tahun 1882 oleh Ferdinand Lindemann iaitu seorang ahli Matematik berbangsa Jerman.

Berdasarkan Kamus Matematik KBSM, π ditakrifkan sebagai nisbah ukur lilit bulatan kepada diameter bulatan. Menurut ahli sejarah, manusia sejak dulu lagi (tahun 2000 SM) telah menyedari bahawa nisbah ukur lilit bulatan kepada diameter adalah sentiasa sama tanpa mengira bulatan kecil atau besar.

Umumnya, manusia telah cuba mencari angka yang tepat bagi nilai π sejak berkurun-kurun dahulu. Nilai π yang pertama diperolehi sekitar tahun 2000 SM iaitu semasa Tamadun Babylon dengan nilai π dinyatakan sebagai 3.125 iaitu $3 + \frac{1}{8}$. Seterusnya, pada tahun 1650 SM, di Egypt, semasa Zaman Pemerintahan Rhind Papyrus, Ahmes membuktikan bahawa nilai π ialah $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$ dan ini bersamaan dengan 3.16045. Pada tahun 1200 SM, di China nilai π yang diperolehi ialah 3. Kesemua nilai awal π tersebut diperolehi berdasarkan ukuran.

Pada tahun 250 SM, Archimedes telah mendapatkan nilai π secara teori dan nilainya dianggarkan 3.1463. Dalam bukunya 'The Measurement of a Circle', Archimedes menyatakan bahawa nilai π terletak antara $3\frac{10}{71}$ dan $3\frac{1}{7}$. Beliau memperolehi nilai tersebut dengan menggunakan poligon yang mempunyai 96 sisi dengan suatu bulatan di dalamnya. Ptolemy pada Tahun Masehi 150 telah mendapat nilai π sebagai $\frac{377}{120}$ yang bersamaan dengan 3.14166. Pada Tahun Masehi 450 pula, Tsu

Ch'ung Chin dari China telah memperolehi nilai π sebagai $\frac{355}{113}$ iaitu bersamaan dengan 3.1415926. Di Baghdad, pada Tahun Masehi 800, Al-Khwarizmi, telah memperolehi nilai π sebagai 3.1416. Zaman Kebangkitan di Eropah turut memberi kesan kepada penghasilan formula bagi π . John Wallis yang hidup pada tahun 1616 hingga 1716 telah membuktikan bahawa $\frac{2}{\pi} = \frac{(1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots)}{(2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots)}$.

Berdasarkan siri Maclaurin bagi $\tan^{-1} x$ iaitu $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$, Leibniz (1646 – 1716) menggantikan x dengan 1 dan memperolehi

$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. Maka nilai π yang diperolehinya ialah

$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$. Siri tersebut menumpu agak lambat yang mana ia

memerlukan 1000 sebutan bagi siri untuk mendapatkan nilai π betul kepada 4

tempat perpuluhan. Walaubagaimanapun, James Gregory (1638 – 1675)

menggantikan x dengan $\frac{1}{\sqrt{3}}$ dan memperolehi

$\frac{\pi}{6} = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{1}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} + \dots \right)$. Siri ini menumpu lebih cepat

berbanding dengan siri yang dihasilkan oleh Leibniz. Siri Gregory ini hanya

memerlukan 10 sebutan sahaja untuk mendapatkan nilai π yang betul kepada 4

tempat perpuluhan.

Euler (1707 – 1783) pula telah menghasilkan suatu siri ketakterhinggaan iaitu

$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pada tahun 1897 pula, 'General Assembly of Indiana' telah

mengisytiharkan bahawa nilai π ialah 4 dan sememangnya nilai ini lebih tidak tepat

daripada apa yang digunakan semasa Tamadun Babylon.

TEMPAT PERPULUHAN BAGI π

Nilai π juga mempunyai tempat perpuluhan yang tiada berkesudahan dan ini menarik minat lebih ramai ahli matematik untuk mengkajinya. Pada tahun 1429, Al-Kashi mendapatkan nilai π sehingga 14 tempat perpuluhan. Vie'te pula pada tahun 1593, telah memperolehi nilai π sehingga 9 tempat perpuluhan dan pada tahun yang sama, Romanus memperolehi nilai π sehingga 15 tempat perpuluhan. Seterusnya pada tahun 1615, Ludolph Van Ceulen telah memperolehi nilai π sehingga 35 tempat perpuluhan dan π dinamakan sebagai nombor Ludolphian sempena namanya.

Pada tahun 1706, Machin menggunakan formula $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$ dan

membuktikan bahawa $\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{239} \right)$. Selepas itu, ahli matematik

terus cuba mendapatkan nilai π , sehinggalah pada tahun 1874, seorang ahli Matematik British, William Shanks, mengambil masa selama 20 tahun untuk mengira nilai π sehingga 707 tempat perpuluhan dengan menggunakan hasil Machin. Walaubagaimanapun, dalam tahun 1945, Ferguson mendapati bahawa Shanks telah membuat kesilapan pada tempat perpuluhan yang ke 528 yang mana selepas itu kesemua digitnya adalah salah.

Dalam tahun 1800, ahli matematik semakin ghairah mendapatkan nilai hampiran bagi π biarpun terpaksa menunggu bertahun-tahun dan mengira secara 'manual'. Seterusnya dengan perkembangan pesat dalam bidang komputer, ahli-ahli matematik semakin cenderung untuk mengkaji misteri nilai π ini. Pada tahun 1949, dengan menggunakan komputer, nilai π dikira sehingga 2000 tempat perpuluhan (Lampiran 2). Pada tahun 1962 pula, π dikira sehingga 100000 tempat perpuluhan.

Pada tahun 1981, Dr. Kazunori Miyoshi dari Universiti Tsukuba, Jepun telah menggunakan komputer jenis Facom M200 untuk mengira nilai π . Beliau telah berjaya mengira nilai π sehingga 2 juta tempat perpuluhan yang dicetak pada 800 muka surat dan mengambil masa 137 jam. Beberapa tahun selepas itu, ahli matematik Jepun, Yoshiaki Tamura dan Yasumasa Kanada, dengan bantuan komputer jenis HITAC M-280 H, memperolehi nilai π sehingga 8 juta tempat perpuluhan dalam masa tidak sampai 7 jam. Nilai π diperkukuhkan lagi oleh Eugena Salamin dari Amerika Syarikat yang telah mengira π kepada 16 juta tempat perpuluhan.

Dalam tahun 1985, Ramanujan seorang ahli Matematik dari India telah mengira π sehingga 17 juta digit. Seterusnya, pada tahun 1991, Chudnovsky telah mendapatkan nilai π sehingga 2,260,321,363 digit dengan menggunakan komputer *m zero*. Pada tahun 1996 pula Bellard memperolehi nilai π sehingga 400 juta tempat perpuluhan.

NOTASI π

Simbol π juga ditakrif dalam pelbagai bentuk. Dalam bahasa Greek π disebut sebagai 'p' yang bermaksud perimeter. Pada 1647, Oughtred menggunakan symbol $\frac{d}{\pi}$ sebagai nisbah diameter suatu bulatan kepada ukurilitnya. David Gregory pula pada tahun 1697, menggunakan symbol $\frac{\pi}{r}$ sebagai nisbah ukur lilit suatu bulatan kepada jejaringnya.

Orang pertama yang menggunakan π dengan maksud sebenarnya seperti yang digunakan pada hari ini ialah seorang ahli matematik berbangsa Wales iaitu William Jones yang menyatakan bahawa 3.14157 ialah π . Seterusnya pada tahun 1737, Euler menggunakan simbol π sebagai notasi piawai.

PENGHAFALAN NILAI

Selain daripada keghairahan mengira nilai π hingga berjuta-juta tempat perpuluhan, ahli Matematik juga turut berlumba-lumba menghafal nilai π . Creighton Carvello dari Reader dalam tahun 1980 telah berjaya menghafal nilai π sehingga 20013 tempat perpuluhan. Beliau disahkan sebagai pemegang rekod di Britain. Di India pula Rajan Srimivasen Mahadevan telah berjaya mengatasi Creighton apabila beliau menghafal π sehingga 31 811 tempat perpuluhan. Nama Rajan telah tercatat dalam Guinness Book of Records bagi tahun 1981.

Planck pula telah menghasilkan satu mnemonik yang terkenal sebagai cara untuk mengingat atau menghafal digit bagi π yang mana setiap digit yang berturutan mewakili bilangan huruf dalam perkataan bagi ayat berikut :

'How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard.....'

Mnemonik di atas bersepadanan dengan 3.14159265358979323846264....

Gephart (2000) turut menyatakan suatu mnemonik yang dihasilkan oleh James. R. Neumann untuk mengingat 31 digit (termasuk nombor 3) bagi π iaitu:

PI

*Now
 I even I
 Would celebrate
 In rhymes unapt
 The great immortal Syracusan
 Rivalled nevermore
 Who in his wondrous lore
 Passed on before
 Gave men his guidance
 How to circles mensurate.*

Shiple (1960) pula telah menghasilkan suatu sajak berkaitan dengan π iaitu:

*But a time I spent wandering in bloomy night;
 Yon tower, tinkling chimewise, loftily opportune.
 Out, up, and together came sudden to Sunday rite,
 The one solemnly off to correct plenilune.*

Pada tahun 1995, sebuah lagi sajak menarik (Lampiran 1) telah dicipta oleh Edgar Allen Poe yang menggambarkan tentang nilai π bertajuk Poe, E. Near a Raven yang bersepadanan dengan π . Sajak beliau ini yang mewakili π sehingga 740 digit pertama agak berbeza sedikit daripada sajak-sajak lain yang dicipta untuk menggambarkan π . Beliau menggunakan kodnya sendiri untuk mengaitkan bilangan huruf N dengan digit bagi π . Berdasarkan kodnya, perkataan dengan bilangan huruf N adalah sama dengan digit N jika N kurang daripada 10. Manakala jika N bersamaan dengan 10, maka digit adalah sifar dan jika N lebih besar daripada 10, maka bilangan digit adalah nombor berturutan. Sebagai contoh perkataan dengan 12 huruf akan mewakili digit 1 dan diikuti oleh digit 2.

Selain daripada itu, nilai π juga digubah dengan menarik mengikut nada lagu 'America' iaitu:

*Three point one four one five nine,
 Two six five three five eight nine,
 Seven nine three two three eight four,
 Six two six and a whole lot more.*

π juga turut disusun dalam bentuk limerik seperti berikut:

This a favorite project of mine

*A new value of pi to assign
 I would fix it at 3
 For it's simpler, you see,
 Than 3 point 1 4 1 5 9*

*I used to think math was no fun
 'Cause I couldn't see how it was done
 Now Euler's my hero
 For I now see why $0 = e^{\pi i} + 1$*

KESIMPULAN

Pi (π), biarpun sebutannya ringkas dan mudah sebenarnya menyimpan rahsia yang tersendiri. Nilainya yang biasa ditulis sehingga 3 tempat perpuluhan sahaja atau dalam bentuk pecahan $\frac{22}{7}$, atau ditulis sehingga jutaan tempat perpuluhan sekalipun, tidak akan memberi nilai yang tepat baginya. Walauapapun nilai yang dikira bagi π , ia hanyalah suatu penghampiran sahaja. Huruf abjad Greek ini, iaitu π , ternyata sangat istimewa bagi yang mengkajinya.

LAMPIRAN 1

Poe, E.

Near a Raven

Midnights so dreary, tired and weary.
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.
During my rather long nap - the weirdest tap!
An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.
"This", I whispered quietly, "I ignore".

Perfectly, the intellect remembers: the ghostly fires, a glittering ember.
Inflamed by lightning's outbursts, windows cast penumbras upon
this floor.
Sorrowful, as one mistreated, unhappy thoughts I heeded:
That inimitable lesson in elegance - Lenore -
Is delighting, exciting...nevermore.

Ominously, curtains parted (my serenity outsmarted),
And fear overcame my being - the fear of "forevermore".
Fearful foreboding abided, selfish sentiment confided,
As I said, "Methinks mysterious traveler knocks afore.
A man is visiting, of age threescore."

Taking little time, briskly addressing something: "Sir," (robustly)
"Tell what source originates clamorous noise afore?
Disturbing sleep unkindly, is it you a-tapping, so slyly?
Why, devil incarnate!--" Here completely unveiled I my antedoor--
Just darkness, I ascertained - nothing more.

While surrounded by darkness then, I persevered to clearly
comprehend.
I perceived the weirdest dream...of everlasting "nevermores".
Quite, quite, quick nocturnal doubts fled - such relief! - as my intellect
said,
(Desiring, imagining still) that perchance the apparition was uttering
a whispered "Lenore".
This only, as evermore.

Silently, I reinforced, remaining anxious, quite scared, afraid,

While intrusive tap did then come thrice - O, so stronger than sounded afore.
"Surely" (said silently) "it was the banging, clanging window lattice."

Glancing out, I quaked, upset by horrors hereinbefore,
Perceiving: a "nevermore".

Completely disturbed, I said, "Utter, please, what prevails ahead.
Repose, relief, cessation, or but more dreary 'nevermores'?"
The bird intruded thence - O, irritation ever since! -
Then sat on Pallas' pallid bust, watching me (I sat not, therefore),
And stated "nevermores".

Bemused by raven's dissonance, my soul exclaimed, "I seek
intelligence;

Explain thy purpose, or soon cease intoning forlorn 'nevermores!'"
"Nevermores", winged corvus proclaimed - thusly was a raven
named?

Actually maintain a surname, upon Pluvius seashore?
I heard an oppressive "nevermore".

My sentiments extremely pained, to perceive an utterance so plain,
Most interested, mystified, a meaning I hoped for.
"Surely," said the raven's watcher, "separate discourse is wiser.
Therefore, liberation I'll obtain, retreating heretofore -
Eliminating all the 'nevermores' ".

Still, the detestable raven just remained, unmoving, on sculptured
bust.

Always saying "never" (by a red chamber's door).
A poor, tender heartache maven - a sorrowful bird - a raven!
O, I wished thoroughly, forthwith, that he'd fly heretofore.
Still sitting, he recited "nevermores".

The raven's dirge induced alarm - "nevermore" quite wearisome.
I meditated: "Might its utterances summarize of a calamity before?"
O, a sadness was manifest - a sorrowful cry of unrest;
"O," I thought sincerely, "it's a melancholy great - furthermore,
Removing doubt, this explains 'nevermores' ".

Seizing just that moment to sit - closely, carefully, advancing beside it,
Sinking down, intrigued, where velvet cushion lay afore.
A creature, midnight-black, watched there - it studied my soul,
unawares.

Wherefore, explanations my insight entreated for.
Silently, I pondered the "nevermores".

"Disentangle, nefarious bird! Disengage - I am disturbed!"
Intently its eye burned, raising the cry within my core.
"That delectable Lenore - whose velvet pillow this was, heretofore,
Departed thence, unsettling my consciousness therefore.
She's returning - that maiden - aye, nevermore."

Since, to me, that thought was madness, I renounced continuing sadness.

Continuing on, I soundly, adamantly forswore:

"Wretch," (addressing blackbird only) "fly swiftly - emancipate me!"

"Respite, respite, detestable raven - and discharge me, I implore!"
A ghostly answer of: "nevermore".

" 'Tis a prophet? Wraith? Strange devil? Or the ultimate evil?"
"Answer, tempter-sent creature!", I inquired, like before.
"Forlorn, though firmly undaunted, with 'nevermores' quite
indoctrinated,
Is everything depressing, generating great sorrow evermore?
I am subdued!", I then swore.

In answer, the raven turned - relentless distress it spurned.
"Comfort, surcease, quiet, silence!" - pleaded I for.
"Will my (abusive raven!) sorrows persist unabated?
Nevermore Lenore respondeth?", adamantly I encored.
The appeal was ignored.

"O, satanic inferno's denizen -- go!", I said boldly, standing then.
"Take henceforth loathsome "nevermores" - O, to an ugly Plutonian
shore!
Let nary one expression, O bird, remain still here, replacing mirth.
Promptly leave and retreat!", I resolutely swore.
Blackbird's riposte: "nevermore".

So he sitteth, observing always, perching ominously on these
doorways.
Squatting on the stony bust so untroubled, O therefore.
Suffering stark raven's conversings, so I am condemned, subserving,
To a nightmare cursed, containing miseries galore.
Thus henceforth, I'll rise (from a darkness, a grave) -- nevermore!

-- Original: E. Poe
-- Redone by measuring circles.

LAMPIRAN 2

3. 14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862
8034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701
9385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456
4856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925
4091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092
1861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733
6244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766
9405132000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585
3710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297^74771309960518707211349
999983729780499510597317328160963185950244594553469083026425223082533446850352619311
8817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388
2353787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198938095257201065485
8632788659361533818279682303019520353018529689957736225994138912497217752834791315155
7485724245415069595082953311686172785588907509838175463746493931925506040092770167113
9009848824012858361603563707660104710181942955596198946767837449448255379774726847104
0475346462080466842590694912933136770289891521047521620569660240580381501935112533824
3003558764024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028
6182974555706749838505494588586926995690927210797509302955321165344987202755960236480
6654991198818347977535663698074265425278625518184175746728909777727938000816470600161
4524919217321721477235014144197356854816136115735255213347574184946843852332390739414
3334547762416862518983569485562099219222184272550254256887671790494601653466804988627
2327917860857843838279679766814541009538837863609506800642251252051173929848960841284
8862694560424196528502221066118630674427862203919494504712371378696095636437191728746
77646575739624138908658326459958133904780275901...

Simbol ^ menunjukkan Sajak Poe E Near a Raven berakhir di situ
iaitu tempat ke 740 bagi π.

RUJUKAN

- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2002). *Calculus*. New York. Wiley.
- Beckmann, P. (1989). *A History of Pi*. New York : Dorset Press.
- Borwein, J. M., & Borwein, P. B. (1987). *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*. New York. Wiley.
- Castellanos, D. (1998). The Ubiquitous Pi. *Mathematics Magazine*, 61, 67 – 98.
- Chan, J. (1993). As Easy as pi. *Math Horizon*, Winter 1993, 18 – 19.
- Facts about Pi. (1997). *The Math Forum @ Drexel*. Retrieved November 14, 2003, from: <http://mathforum.org/library/drmath/view/57543.html>.
- Finding Pi. (1997). *The Math Forum @ Drexel*. Retrieved November 14, 2003, from: <http://mathforum.org/library/drmath/view/55815.html>.
- Finding the Value of Pi. *Math Forum : Finding the Value of Pi*. Retrieved December 1, 2003, from: <http://mathforum.org/isaac/problems/pi1.html>.
- Gephart, J. (2000). The Uselessness of Pi and its Irrational Friends. *The Math Forum @ Drexel*. Retrieved November 22, 2003, from: <http://www.go2net.com/useless/useless/pi.html>.
- History of Calculating Pi. (1998). *The Math Forum @ Drexel*. Retrieved November 14, 2003, from: <http://mathforum.org/library/drmath/view/52543.html>.
- Peterson, I. (1996). A Passion for Pi. *Ivars Peterson's MathLand*. Retrieved November 22, 2003, from: http://www.maa.org/mathland/mathland_3_11.html.
- Pi approximations. *Wolfram Research : mathworld.wolfram.com*. Retrieved November 14, 2003, from: <http://mathworld.wolfram.com/PiApproximations.html>.
- Pi in Real Life. (1996). *The Math Forum @ Drexel*. Retrieved November 14, 2003, from: <http://mathforum.org/library/drmath/view/57045.html>.
- Pong, L. P. (1980). Approximation of pi. *Majalah Matematik*, 3, 1 – 4.
- Selle, D. T. (1970). Pi, Polygon and a Computer. *Maths Teacher*, 63, 128 – 132.
- Shiple, J. (1960). Pi Poems in Connor, J.J. , & Robertson, E.F. The Story of Pi. Retrieved November 14, 2003, from: <http://www.resonancepub.com/pi.htm>
- Spiegel, M. R. (1968). *Advanced Calculus*. McGraw-Hill.
- Witcombe, C. Notes on Pi (π). *The Math Forum @ Drexel*. Retrieved November 14, 2003, from: <http://witcombe.sbc.edu/earthmysteries/EMPi.html>.